MATHEMATICAL
ISCOVERY

数学的发现

第二卷

〔美〕乔治·波利亚著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译



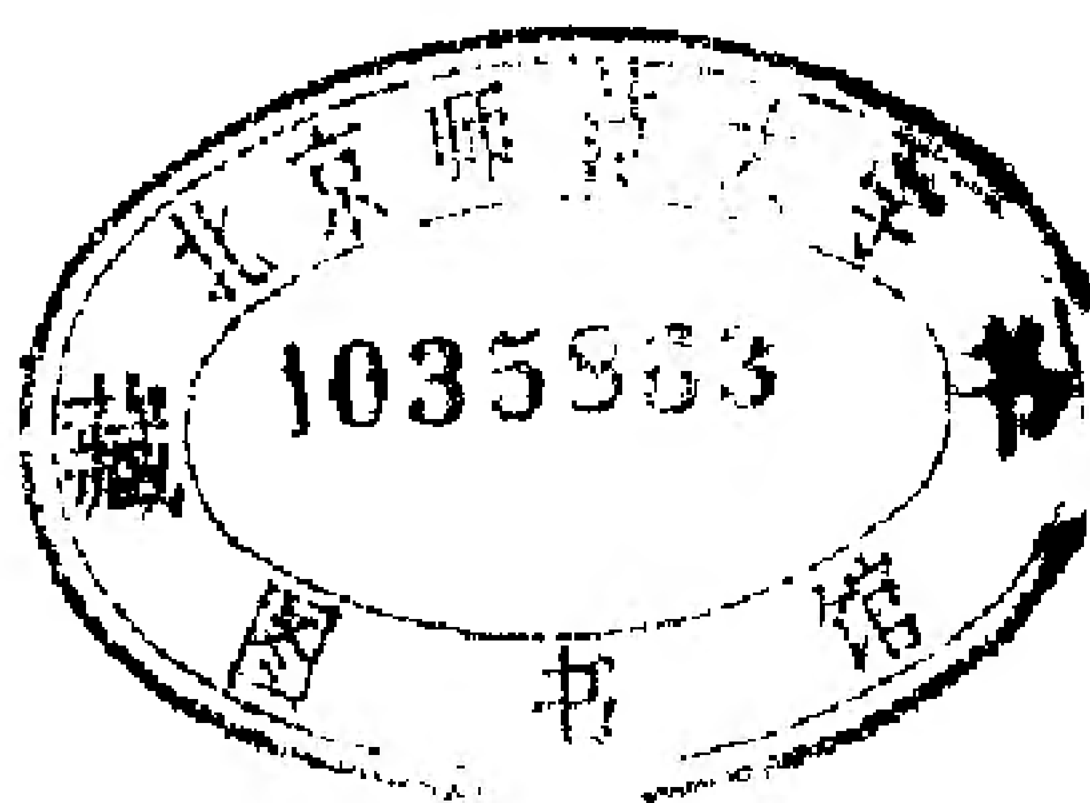
内蒙古人民出版社

数学的发现

——对解题的理解、研究和讲授

第二卷

（美）乔治·波利亚著
刘景麟　曹之江　邹清莲　译



内蒙古人民出版社
一九八一·呼和浩特

Mathematical Discovery

G. Polya

Vol. I

John Wiley & Sons, Inc. 1965

数学的发现

第二卷

〔美〕乔治·波利亚 著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译

内蒙古人民出版社出版

(呼和浩特市新城西街82号)

内蒙古新华书店发行 内蒙古新华印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:10.5 字数:217千

1981年12月第一版 1982年8月第1次印刷

印数:1— 6,100 册

统一书号:7089·216 每册:1.10元

序

现在这本第二卷试图按计划将第一卷序言中指出的那些目标付诸实施。

谨以本书最后一章献给查理士·劳易纳，在他七十寿辰之际，我谨在此再次向他表示深深的敬意和友好的感情。

乔治·波利亚

1964年10月于瑞士苏黎世

目　　录

第二部分　通向一般方法（续）

第七章　解题过程的几何图示

第八章　计划和程序

第十章　想法的产生

第十一章　思维的作用

第十五章　猜测和科学方法

第二部分　通向一般方法(续)

正如阳光普照万物，我们的智慧和学识在处理各种不同对象时也是一视同仁的。

《笛卡儿全集》，第十卷，p.360，法则Ⅰ。

第七章　解题过程的几何图示

没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有益的。

《笛卡儿文集》，第十卷，p.413；
思维的法则，法则Ⅻ。

§7.1　隐喻

事情发生在大约五十年前，那时我还是个大学生；我正在帮一个男孩子准备考试，当时我必须给他解释一道初等的立体几何题，可是因一时未得要领而卡住了。居然对付不了这样一道简单的题目，我只能责怪自己。第二天晚上我坐下来，重新从头到尾仔细地去解它，那次我是做得这样彻底，以致这辈子再也不会忘记它了。由于试图直观地去看清楚整个解题的自然过程和解题中涉及的一系列基本想法，我终于得到了一个解题过程的几何图示法。这是我对解题的第一个发现，也是我终生对解题都产生兴趣的开端。

我所说的几何的譬喻，它最终是以一组日常的隐喻的辞来表现的。人们不止一次地注意到语言是充满着隐喻的（有的毫无生气，有的是半死不活，有的则生动活泼）。我不知道人们是否还注意到了很多隐喻是互相关联的：它们或是联系着的，或是结合在一起的，它们形成了团，形成了多少有些松散的及重叠的族。不管怎么说吧，有相当广泛的一族隐

喻词，具有两个共同特点：它们都关联着基本的人类解决问题的活动，而且都提供了同样的几何形象。

发现解法，就是在原先是隔开的事物或想法（已有的事物和要求的事物，已知量和未知量，假设和结论）之间去找出联系。被联系的事物原来离得越远，联系的发现者的功绩也就越大。有时我们发现这种联系就象一座桥：一个伟大的发现使我们强烈地觉得象是在两个离得很远的想法的鸿沟之间架上了桥。我们常常看到这种联系是由一条链来贯穿的：一个证明象是一串论据，象是一条由一系列结论组成的链，也许是一条长链。这条链的强度是由它最弱的一环来代表的。因为那怕是只少了一环，就不会有连续推理的链，也就不会有有效的证明。对于思维上的联系我们更经常使用的词是线索，比如说，我们都在听教授讲课，但他失去了证明的线索，或是被一些推理线索缠乱了，他不得不看一下讲稿，以拾起失掉的线索，等他把线索整理出来得到最终结论时，我们也都已经困倦不堪了。将一条细微的线索当成一条几何上的线，将被联系着的事物当成几何上的点，这样无可避免地，一幅隐喻着一系列数学结论的图式便必然地浮现出来了。

现在让我们停止聆听高谈，转过来具体考查一些几何图形吧。

§7.2 问题是什么？

我们需要一个例子，我选择了一个非常简单的立体几何题①：

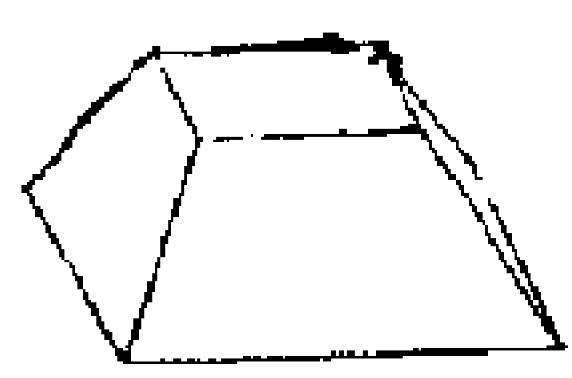
---

① 此题与先前考虑过的那个问题非常类似，甚至更简单些。见文献〔16〕，〔18〕。

给定棱台的高h，上底的一条边长a和下底的一条边长b求正方棱台的体积F。

（以正方形为底的棱锥，如果它的高经过底的中心，则称为正方棱锥。棱台是棱锥的底以及平行于底的一个平面所截出的部分，这个平行于底的平面包含了棱台的一个面，我们称它为棱台的上底，棱台的下底就是原来整个棱锥的底，它的高就是两底间的垂直距离。）

解这个问题的第一步是先集中到目标上。你要求的是什么？我们向自己提出问题，并尽可能明确地画出所求的体积F的图形（见图7.1的左侧）。所求目标在思维中的位置则用一个单点，记为F，象征性地表示出来，我们的全部注意力应该集中在它上面（见图7.1的右侧）。

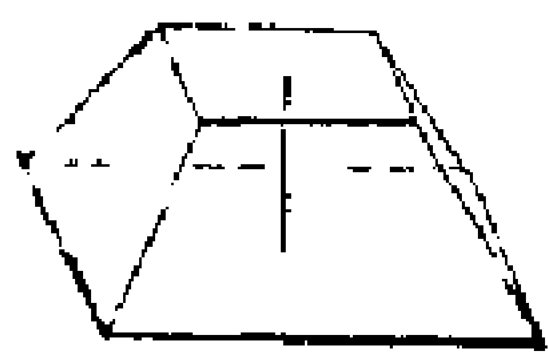


F

你要求的是什么？

图7.1 集中到一点：目标

如果什么也不给，我们就求不出未知量F。我们问自己：已知量是什么？或你有些什么？这样，我们就把注意力集中到图中那些长度已定的线段a，b和h上，见图7.2的左侧。（在所考虑的立体中，以a为边的正方形在上边，以b为



F

你有些什么？

a h b

图7.2 未定的问题：沟上架桥

边的正方形在下边。）我们在图7.2右侧增加三个新点，分别记作a，h和b，来代表三个已知量在变化了的思维中的位置，它们与F之间有一道鸿沟，这就是图7.2右边的那一片空白。这片空白象征着尚未解决的问题；我们的问题现在就集中为将未知量F与已知量a、h和b联系起来，我们必须在它们之间的那道鸿沟上架起桥来。

§7.3 这是一个主意

我们的工作是从把问题的目标，未知量和已知量赋与几何形象开始的。工作的最初阶段已由图7.1和7.2适当地描绘出来了。那么我们怎样从这里继续前进呢？下一步该怎么走呢？

如果你不能解出新提出的问题，那就去寻找一个适当的有关联的问题。

在当前的情形，用不着去找得很远。其实，未知量是什么？一个棱台的体积。而这是一个什么样的棱台呢？它是如何定义的？它是一个棱锥的一部分。是哪一部分呢？介于——不，就说到这里吧，让我们用另一种方式来叙述它：这个棱台是我们用一个平行于底的平面，截去整个棱锥中的一个较小的棱锥以后所剩下的部分。在当前的情形，大（整个）棱锥的底是一个面积为b^2的正方形，见图7.3。如果我们知道这两个棱锥的体积B和A，我们就能求出棱台的体积：

$$F = B - A$$

让我们来求体积B和A吧！对了，这是一个主意！

于是我们原来的问题——求F，就转变成了两个适当关联着的辅助问题——求A和B。为了用图式来表达这一转变，

我们在未知量F和已知量a，h，b中间的那片空白上引进两个新的点，记为A和B。我们用斜线把A和B与F联结起来，以此来表示这三个量之间的基本关系：从A和B出发，我们就能得到F，即关于F的问题的解法是建立在关于A和B这两个问题的解法的基础上的。

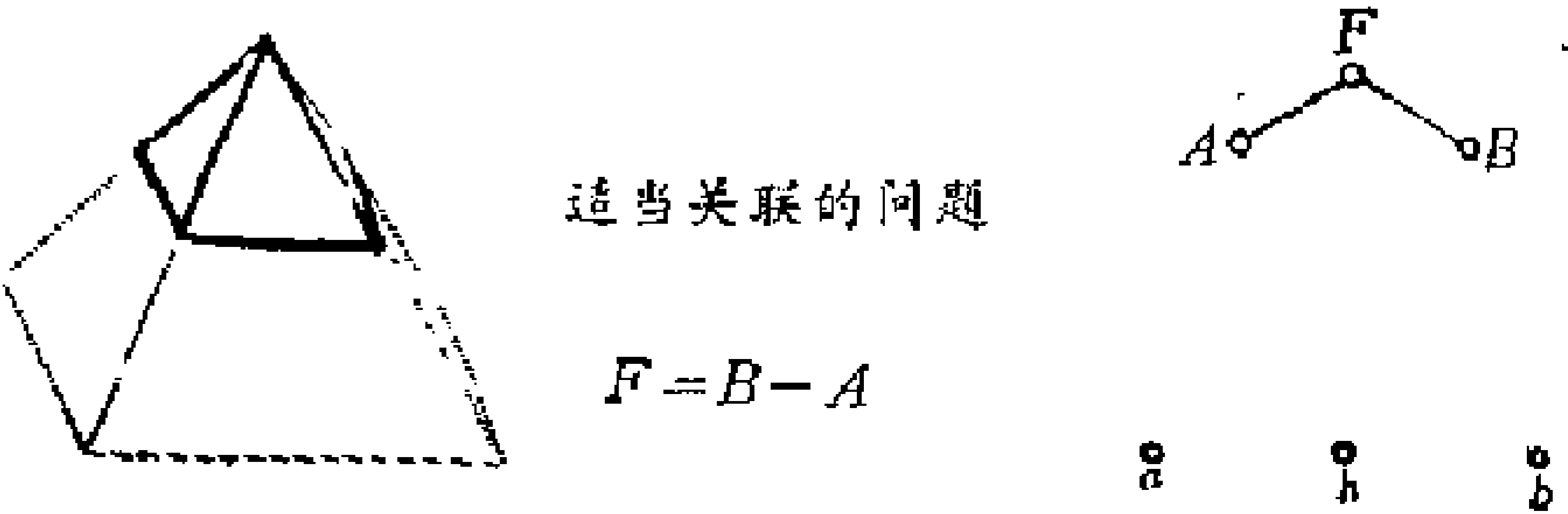


图7.3　如果你不能解所提出的问题，那就去寻找一个…

我们的工作还没做完，我们还要去求两个新的未知量A和B。在图7.3中，两个未决的点A和B与已知量a、h和b之间还隔着一道鸿沟。不过事情看来是有希望的，因为棱锥对我们来说是比棱台更熟悉的图形，而且，虽然现在替代未知量F的是两个未知量A和B，但这两个未知量是完全类似的，而且分别和已知量a和b有类似的关系。对应地，在图7.3中，思维状态的图式表示是对称的。线段FA倾向于给定的a，而FB则倾向于给定的b。我们已经开始在原来的未知量和已知量之间那片空白上架桥了；剩下的部分就窄多了。

§7.4　发展我们的想法

我们现在到了哪儿啦？你要求什么？我们要求找出未知量A和B。未知量A是什么？一个棱锥的体积。你怎样才能得到这一类的量？你怎样才能求出这一类未知量？根据哪些

已知量你就能求出这一类未知量？如果我们有两个已知量：底面积和棱锥的高，这个棱锥的体积就能计算出来。事实上，这个体积就是这两个量的乘积再除以3。这里高度并没有给出来，不过我们还是可以把它考虑进来，设它是x，则

$$A=\frac{a^2x}{3}$$

在图7.4的左侧，棱台上面的小棱锥显示得较为明白，我们特别强调了它的高x。这一阶段的工作则在图7.4的右侧给出了图式表示，在已知量的上面出现了一个新的点x。用斜线分别把A和x，A和a联结起来，表示由x和a能得出A，即A能用x和a表示出来。虽然仍有两个未知量（在图7.4中悄悬在半空的不确定的点）需要去求，但我们已经跨出了前进的一步，因为我们至少已经成功地把未知量F和一个已知量a联系起来了。

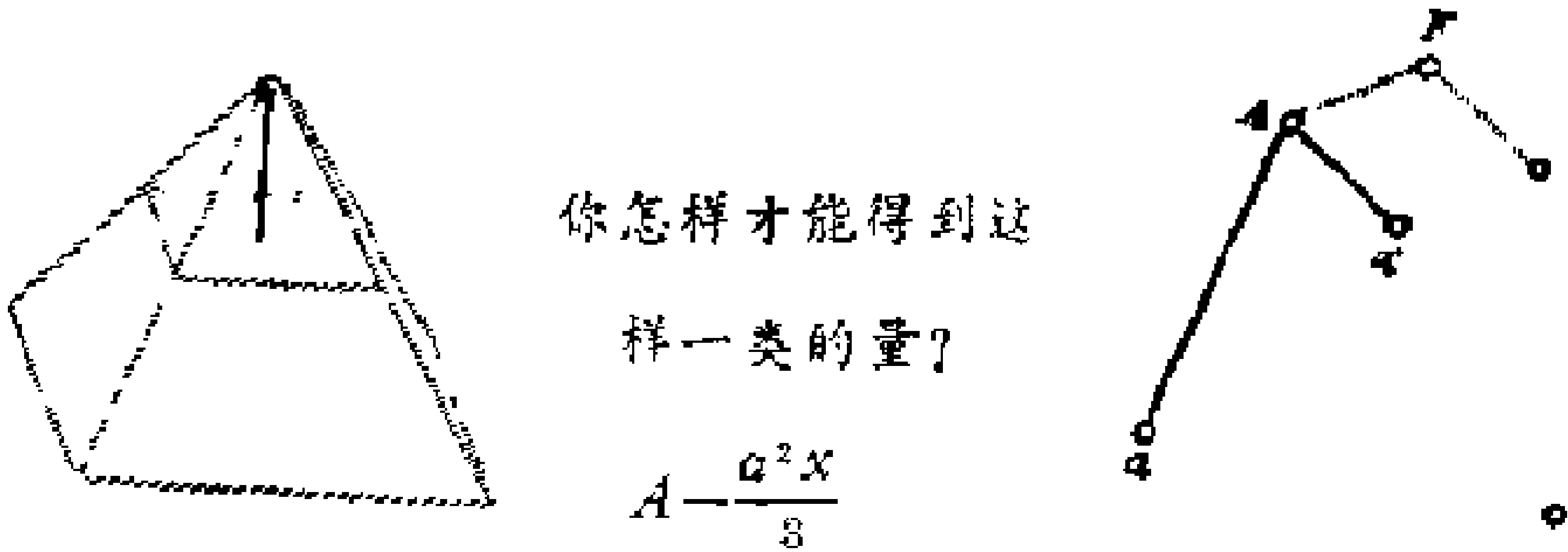


图7.4 和已知量的第一个联系已找出，但还有不定的点悬在半空中

不管怎么说，下一个步骤是显然的。未知量A和B具有类似的性质（它们在图7.3中是对称地表示出来的）。我们

已经把体积A用底和高表示出来了，我们也能把体积B类似地表示为：

$$B=\frac{b^2(x+h)}{3}$$

在图7.5的左侧部分，含棱台的大棱锥显示得比较明白，这里特别强调了它的高$x+h$。在图7.5的右侧部分出现了三条新的斜线，把B分别与b，h和x联结起来。这些线表示B能由b，h和x得出，即B能由b，h和x表示出来。于是只有一个点还悬着——点x还没有与已知量联结起来。沟变得更加狭窄，它现在只横在x和已知量当中了。

剩下的未知量是什么？是x——一条线段的长。你怎样才能求出这一类未知量呢？怎样才能得到这类事物呢？

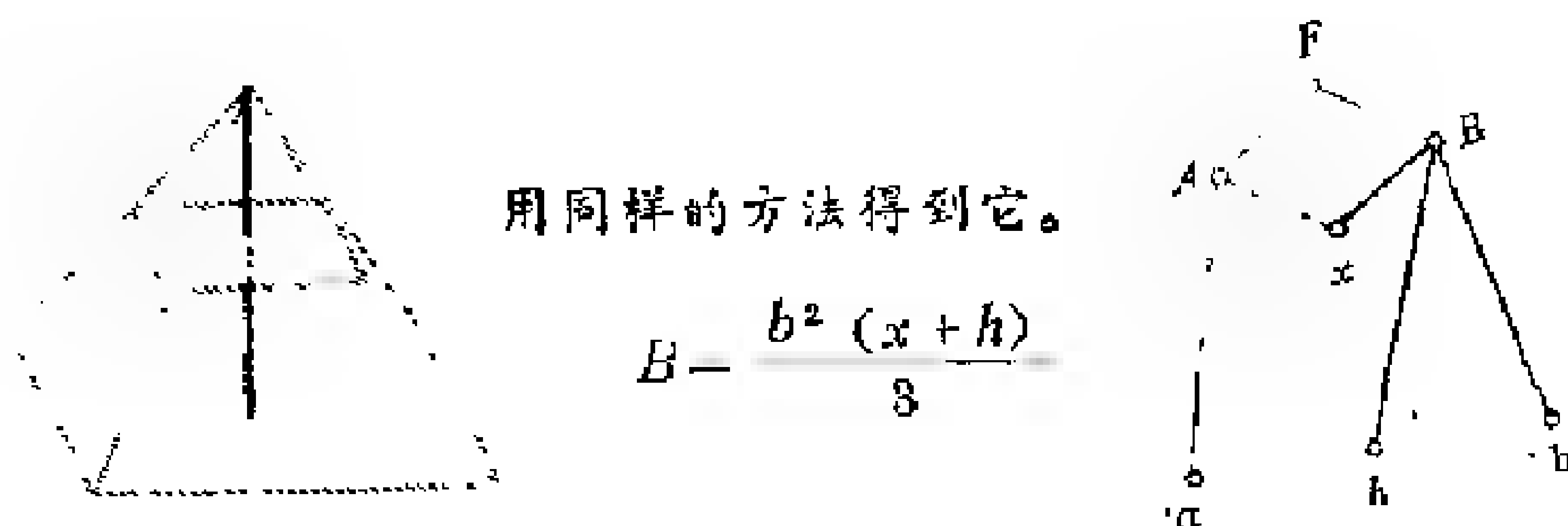


图7.5 只剩下一个问题悬而未决了

几何中最常见的事就是从一个三角形——如果有可能就从一个直角三角形，或是从一对相似三角形去得出一条线段的长。然而图形里还没有一个用得上的三角形，而这里应该有一个以x为边的三角形。这样一个三角形应当在一个通过体积为A的小棱锥的高的平面上，这个平面同时也应当通过体积为B的大棱锥的高，而大棱锥与小棱锥是相似的。是的，通过这个高并且与这些棱锥中某一个的底的一条给定边

平行的平面上有两个相似三角形。这就是我们所要的！好了，完成了！

在图7.6中显示了一对相似三角形，由此，x可以很容易地通过下列比例式算出：

$$\frac{x}{x+h}=\frac{a}{b}$$

细节在这个阶段并不重要，重要的乃是现在x能够由三个已知量a，h和b表示出来了。图7.6右侧部分出现的一条新的斜线正好表示了x可以与a，h和b联系起来。

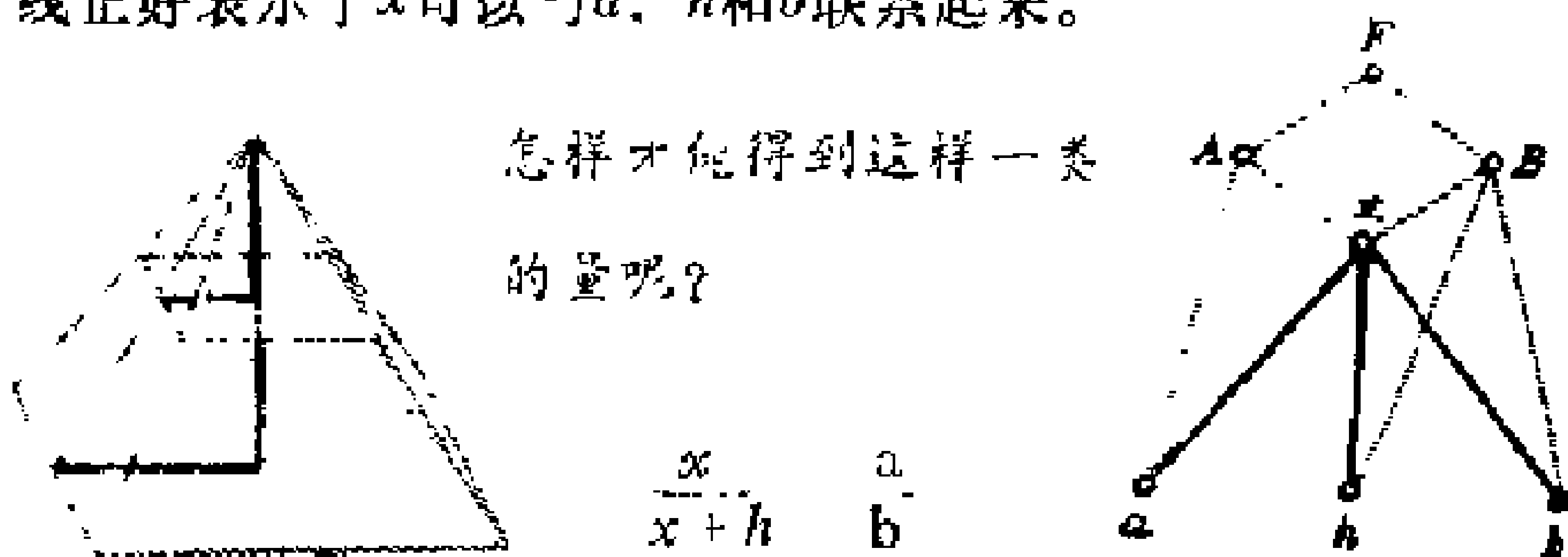


图7.6 我们已经成功地在鸿沟上架起了桥

好！我们已经成功地在鸿沟上架起了桥，成功地通过中间量（辅助未知量）A，B和x，在未知量F和已知量a，h和b之间建立起一个不中断的联络网。

§7.5 彻底完成它

这个问题解出来了吗？还没有——还没有彻底解出来。我们应当把棱台的体积F用已知量a，h和b表示出来，而这一点还没有做到。但我们工作中比较重要也是比较吸引人的部分已经过去了；剩下的任务只是些按部就班的事，不再需

要拐什么弯了。

在我们工作的第一部分中是有冒险的因素的。在每一个阶段我们总是希望下一步会使我们更靠近我们的目标——在鸿沟上架起桥来。当然，我们希望是这样，但我们并不十分有把握。在每一阶段我们都必须把下一步想出来并且冒险地去试它。但现在再也不需要什么发明和冒险了。我们已经预见到只要沿着图7.6中那个不中断的联络网中的线索走去，就能够万无一失地从已知量a，h和b到达未知量F。

我们的第二部分工作就从第一部分结尾处开始，首先来处理最后引进的辅助未知量x。由§7.4的最后一个等式可得

$$x=\frac{ah}{b-a}$$

然后把x的值代入§7.4所得到的两个等式中，得

$$A=\frac{a^3h}{3(b-a)},\qquad B=\frac{b^3h}{3(b-a)}$$

（这两个结果之间的类似之处使人感到欣慰。）最后我们用一下§7.3中一开始就得到的等式

$$F=B-A=\frac{b^3-a^3}{b-a}\cdot\frac{h}{3}$$

$$F=\frac{a^2+ab+b^2}{3}h$$

这就是所要的表达式。

图7.7恰当地把这一部分工作用符号描述了出来，其中每一条联线都带有箭头，它指出我们是朝哪个方向去从事这

一联系的。我们从已知量a，h和b出发，由此向前经过中间的辅助未知量x，A和B到达原来的、主要的未知量F，通过已知量一个一个地把这些量表示出来。

§7.6 慢镜头

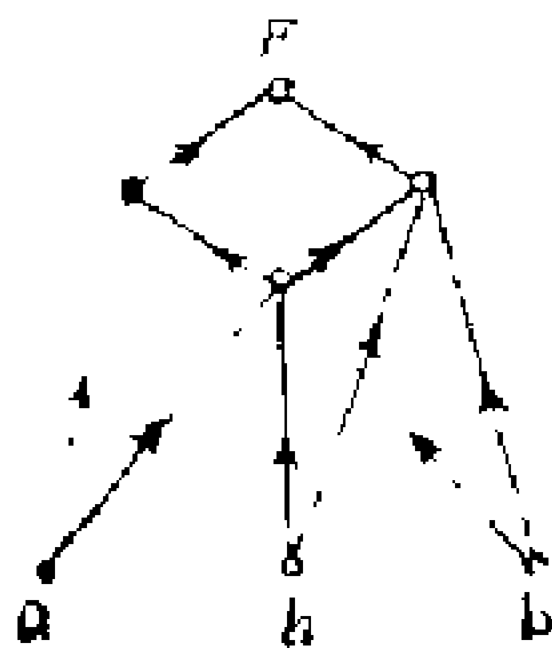


图7.7 从已知量到未知量的工作图

图7.1到图7.7表达了解题的一个接一个的阶段。我们把这七个图组合成一幅综合的图，图7.8。让我们从左到右依次来看图7.8。当我们很快看过去时，便好像是在看关于解题者前进步伐及发现进程的电影演出，如果我们放慢速度地看过去，我们便得到一组求解过程的慢镜头，它给我们留出了时间，使我们能对重要的细节进行仔细地观察。

在图7.8中，解的每一个阶段（解题者的每一个思维状态）均表示在几个不同的水平位置上；属于同一个思维状况的各项则从上到下垂直地列在图中。于是解的进程沿着四条平行线，呈现在四个不同的水平位置上。

列在最上面的水平位置上的都是几何图象，姑称之为是图象的水平，在这一水平上，我们看到了所研究的几何图形在解题者的脑子里的演化过程。在每一个阶段，解题者对所探讨的几何图形都有一幅想象的画面，但是随着过渡到下一个阶段，画面也在改变，某些细节可能变得不重要了，而另一些细节却引起我们的注意，新的细节会加进来。

转到下一层，我们看到的是表示关系的水平。在图示

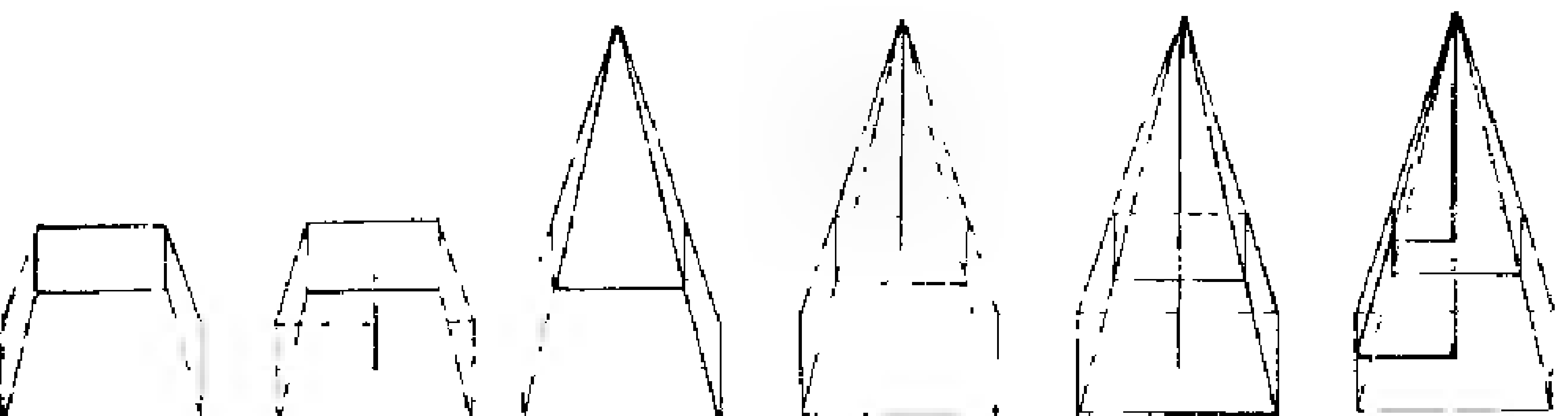
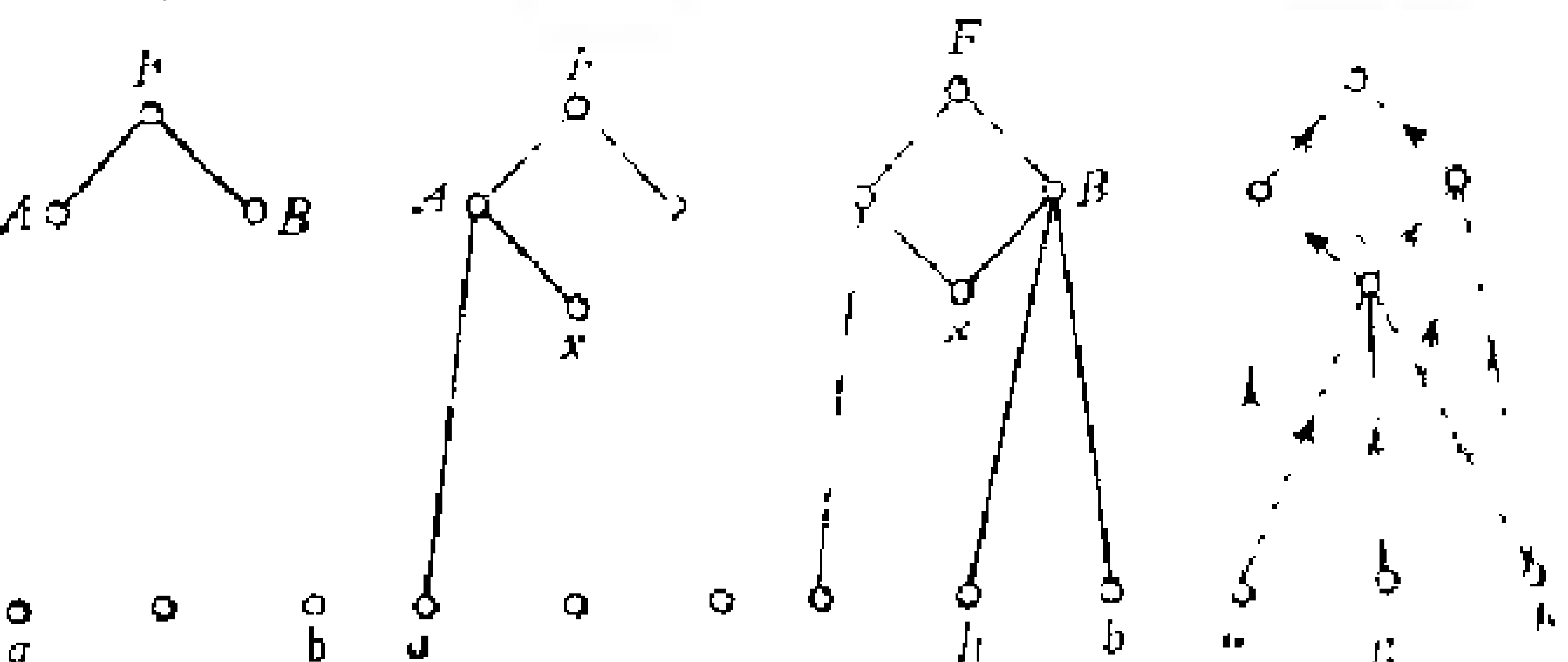



图7.8 列在四个水平位置上的同步过程

中，所考虑的对象（未知量，已知量，辅助未知量）都用点表示，而联系这些对象的关系则用联结这些点的线段来表示。

在表示关系的水平下面，我们立即看到了数学的水平，它由数学公式组成，且与表示关系的水平形成对比。在表示关系的水平上，我们把问题已达到的那个阶段所得到的全部关系都标了出来，不过最后得到的关系则是用粗线描出以示强调，但是并没有较前一阶段展示更多的细节。而在数学的水平上，则只有最后得到的关系才写了出来，前面已经得到的那些关系都没有写出来。

继续往下，我们就得到对我们来说是基本的一层，即启发的水平。在每一阶段，它都提出一个简单的、自然的（一般都用得上的！）问题或者提示，这些问题或提示使得我们可以进入那个阶段。我们主要关心的就是去研究这些问题或提示的实质。

§7.7预习

我们应该反复地审视图7.8。我们要把以往的经验跟它进行比较，建立起联系来。我们应该在这些图形的背后领悟出某些有趣的、值得进一步去研究的东西。在单个的问题的解法图示里，我们将把那些对以下各章所处理的一般问题有价值的启示尽量发掘出来。我们将按各章的顺序大略地考查一下。

（本章以下各节将预习后面的若干章，它们的章数与以下的节数一致，并且有相同的标题。）

好，现在我们就试着把那些藏在具体问题背后的一般想

法发掘出来吧！

§7.8 计划和程序

依次观察图7.8的各个阶段，我们可以看到解题者的注意力怎样在所探讨的几何图形上徘徊，他是怎样越来越多地把握了图形的细节，以及他是怎样一步一步地建立起联络网从而构成他的解题计划的。仔细观察解题的逐步展开，我们可以从中辨认出若干阶段。

我们已经注意到了（在§7.5）解题过程两个部分的对照：在第一部分（由图7.1到图7.6说明）我们是自上而下做的，即从未知量到已知量；在第二部分（由图7.7说明）我们是自下而上做的，即从已知量到未知量。

然而即使在第一部分我们也可以再分为两个阶段。在开始阶段，图7.1和图7.2，解题者的主要努力是放在了解他的问题。在后一阶段，图7.3到图7.6，他发展了一套逻辑联系的系统，从而建立了一个解题计划。

这后一阶段，即计划的设计阶段，看来是解题者工作的最根本的部分，我们将在第八章里更仔细地去研究它。

§7.9 题中之题

在考查图7.8时，我们会注意到解题者在解他的最初的（所提的、主要的）问题时，会遇到若干个辅助问题（“有帮助的”问题，子问题）。在寻求棱台的体积时，他被引导到去求一个整棱锥的体积，尔后又要去求另一个整棱锥的体积，然后还要去求一条线段的长度。为了得到最初的未知量F，他必须通过这些辅助未知量A，B和x。只要稍微有一点解数学

题的经验，就会知道这种把所提问题分解成若干个子问题的方法是十分典型的。（例如见§2.5（3））

下面我们将彻底地考查辅助问题的作用并区分辅助问题的不同类别。

§7.10 想法的产生

图7.8所示解题的各个步骤中哪一个是最重要的呢？我想，是那个整棱锥的跳出——而且我还认为大多数在这类事情上有过某些经历，并且在他的经历上用过些脑子的人，都会同意我的看法。引进整个棱锥并且把棱台看作是两个棱锥的差是解题中的关键想法。对多数解题者来说，解法的其余部分就比较容易，比较显然和平常了——对有较多经验的解题者来说，这差不多完全是例行手续了。

在现在这种情况里关键想法的出现似乎并不给人很深的印象，但是我们切不要忘了这里所讨论的是一个非常简单的问题。在经历了长时间的紧张和踌躇之后突然看到一道闪光——得到关键的想法，这会给人留下深刻的印象，它或许是一个重要的经验，读者不要放过它。

§7.11 思维的作用

在图7.8的图解表示中，各个进程最显著的标志就是越来越多的细节的引进。当解题者前进时，越来越多的线段同时出现在几何图形和关系图示中。在图形逐渐错综起来的背后，我们应当看到解题者脑子里成长着的结构。在每采取一个重要步骤时，他都调用了某些有关的知识，他认出了某些熟悉的形状，运用了某些已知的定理。在这里，解题者的思

维作用就是把他经验中某些有关的部分重新回忆出来，并且与手头的问题联系起来，这个作用也就是动员和组织的作用。

我们过去曾经有机会谈到这一点(特别是在习题7.4里)，以后我们还将有机会来探讨这一点以及思维作用的其他一些方面。

§7.12 思维的守则

图7.8把解题的进程分别在四个不同的水平位置上表现出来，它指出了关于解题者工作的某些特征。当然，我们很想知道解题者是怎样工作的，但我们更切望知道他应该怎样去工作，图7.8能在这方面给我们什么指示吗?

在图7.8最低的那个水平上，有一系列问题和提示，它们推动着解题者的工作依次连接的各步。这些问题和提示都是简单的，很自然的，而且是非常一般的。它们在我们所选的这个简单的例子里，引导解题者得出了问题的解，在别的无数场合，它们也可以引导着我们。如果说存在着一种思维守则的话（譬如某些指南手册，或者是类似于笛卡儿和莱卜尼兹所寻求的那种万能方法一样的法则汇编或箴言录），那么，从某种意义上讲，排在图7.8最下面那一行上的那些问题和提示就属于这一方面，我们应该彻底地把这一点研究一下。

第七章的习题与评注

7.1 在§7.2中所述问题的另一种处理方法。棱台的底面在一个水平面上（譬如在桌子上）。利用通过棱台顶的四条边的四个铅直平面（见图7.9），我们把棱台分成了九个多面体：

一个体积为Q底为正方形的柱体。

四个体积均为T的底为三角形的柱体。

四个体积均为P的底为正方形的棱锥。

按照图7.10指出的途径计算F。

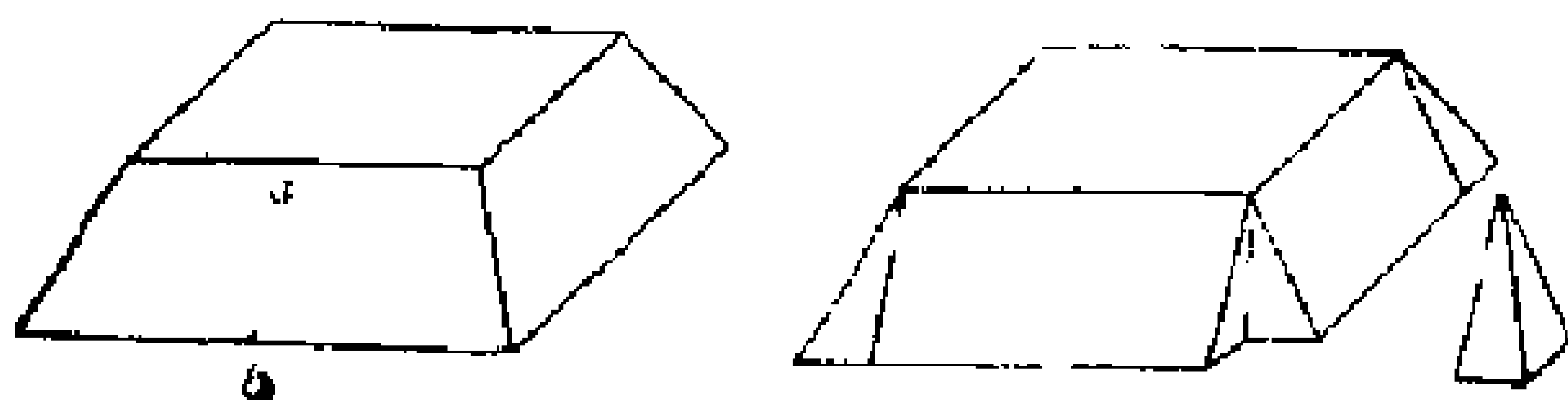


图7.9 四个铅直平面

7.2 用图把§2.5（3）和§2.5（4）所给出的同一个问题的两个解法表示出来（把所牵涉到的量用点表示，互相之间有关系则用线联结起来）。

7.3 一个证明的探求。欧几里德原本第11卷里的命题4可以叙述如下：

假定一直线过两给定直线的交点且垂直于此二直线，则，它也垂直于两给定直线所决定的平面上任一过此交点的第三直线。

我们想分析一下这个命题的一个证明，使它的结构形象化，并且通过运用本章所讲的解题过程的几何图示法去理解这个证明的精神实质。运用类似于图7.1到图7.8所描绘的讨论，我们在处理目前的情况时多少更简捷一些。

我们这里主要关心的是在解题者的脑子里证明是如何形成的。不过，命题的证明本身也是有趣的，它叙述了立体几何的一个基本事实。甚至命题的逻辑形式也是有趣的。有的教师这样说：“两个坏孩子搅乱了整个一个班”，这也许是不对的，但是他的叙述和我们要去证明的欧几里德的命题却具有同一形式。

（1）从后往前推。作图7.11，引进适当的记号，然后我们把要证的命题按标准形式重述一下，把它分成假设和结论：

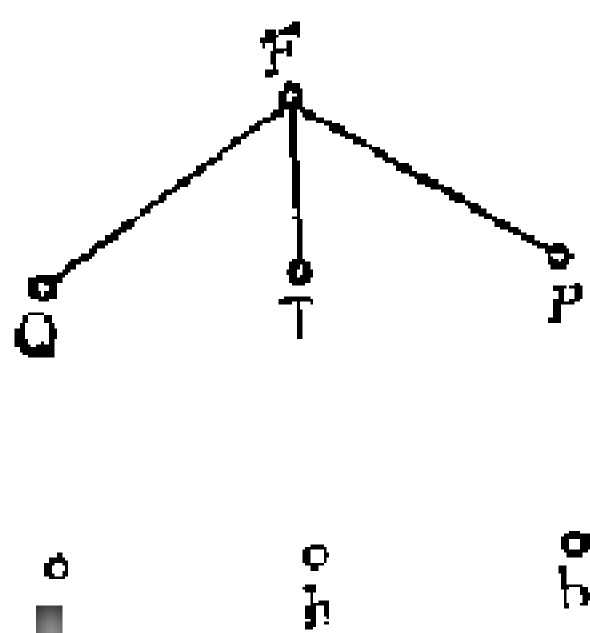


图7.10　另一途径

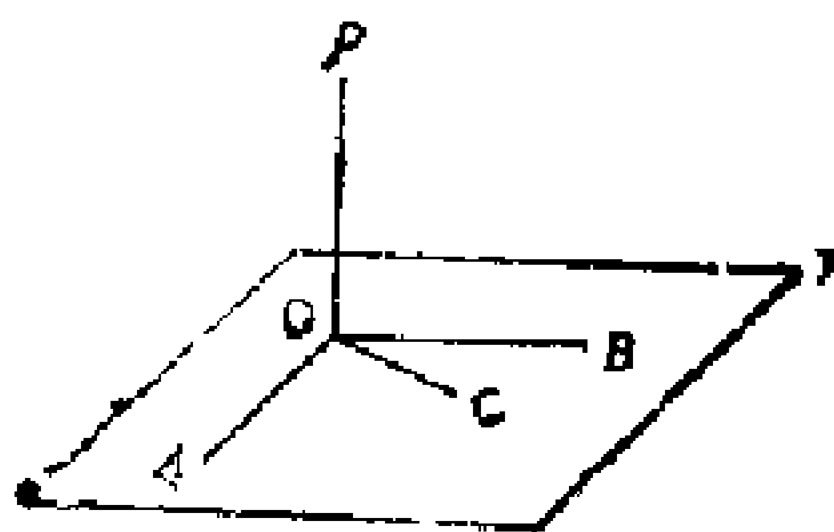


图7.11　两个坏孩子搅乱了整个一个班

假设：三条直线OA、OB和OC都过同一点O，并且在同一平面上，但它们不重合，而且

$PO\perp OA$　　　$PO\perp OB$

结论：则

$$PO\perp OC$$

结论是什么？

就是PO垂直OC，或$\angle POC$是直角。

"直角是什么？它是怎样定义的？"

与它的补角相等的角称为直角。在这种意义下重复一下这个结论或许是有好处的。延长PO到P'（于是P、O和P'在同一直线上，而O和包含O的平面则在P和P'的中间）。那么（见图7.12a）所要的结论就是

$$\angle POC=\angle P'OC$$

"为什么你认为用这种形式表达的结论更有优越性呢？"

我们经常从全等三角形去证明角相等。在现在的情况下，如果我们知道

$$\triangle POC\cong\triangle P'OC$$

（见图7.12b）我们就能证明所要的结论。然而为了证明这一点，我们就要假设P'是这样作出的，即

$$PO=P'O$$

事实上，要证这两个三角形全等我们需要些什么呢？我们知道有一对边是相等的。由作图可得$PO=P'O$，而且显然

$$OC=OC$$

要完成这个证明只需要知道（见图7.12c）

$$PC = P'C$$

就够了。

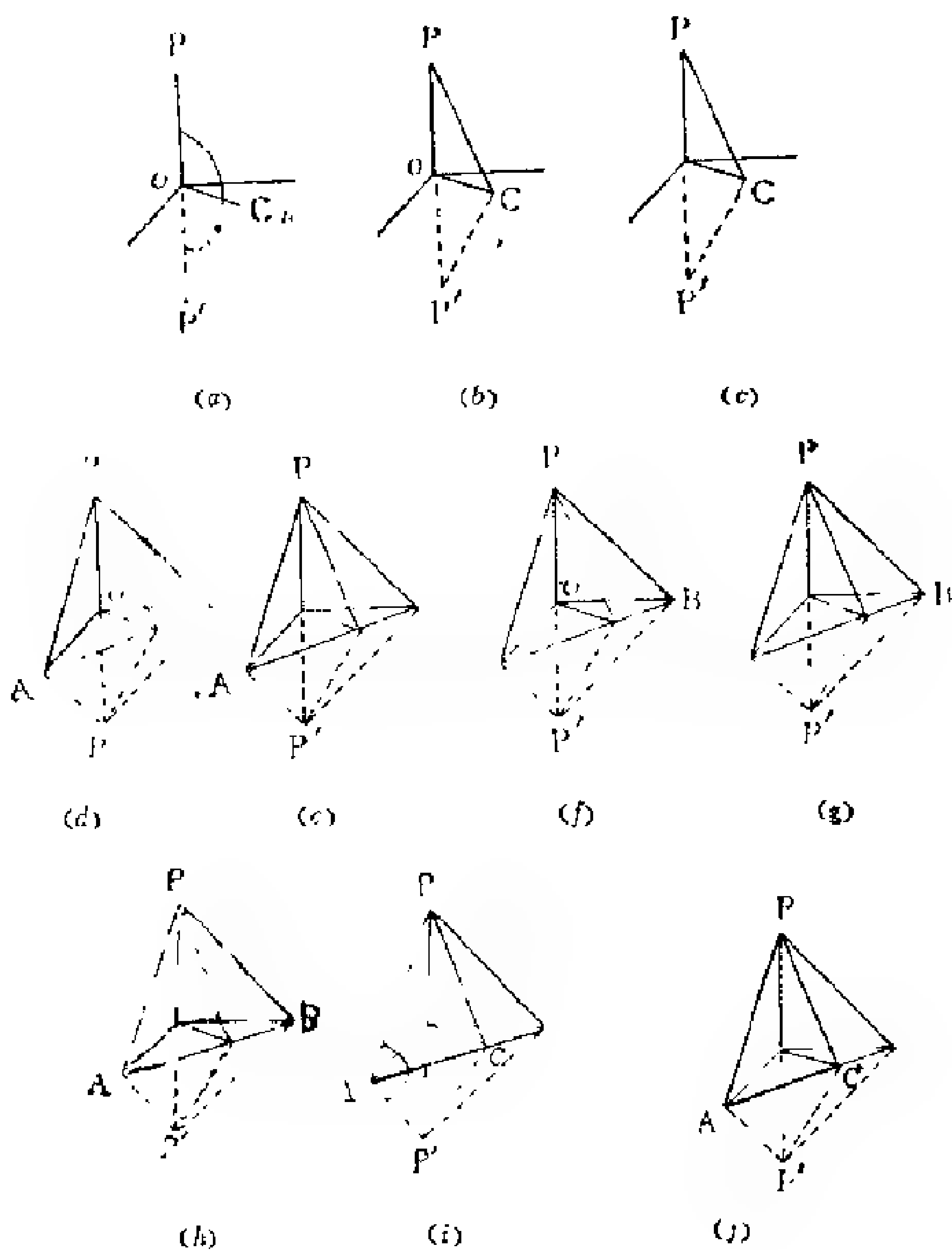


图7.12 几何图形的变化

以上我们从所要求的结论出发返回到给定的假设，我们是从后向前推的。我们已经从结论由后朝前倒推了很大一段了，不过这条引导我们走向假设的路的尽头还在云雾之中，暂时还看不到。我们的工作由图7.13用符号表示了出来，它用图示指出了哪些结论断言可以从哪些别的结论断言推导出来——如象图7.1到7.8那样，指出哪些量能从另外哪一些量求出来。在图7.13中，前面得到的那些等式（或合同）都将用它的左端去表示，即

$\angle POC=\angle P'OC$　　　　由$\angle POC$表示

$\triangle POC\cong\triangle P'OC$　　　　由$\triangle POC$表示

$OC=OC$　　　　由OC表示

等等。事实上，只写出左端也就够了，因为我们只要用P'代替P就可以从它导出右端，即由过A，B，C和O的平面的上半空间到它的下半空间。

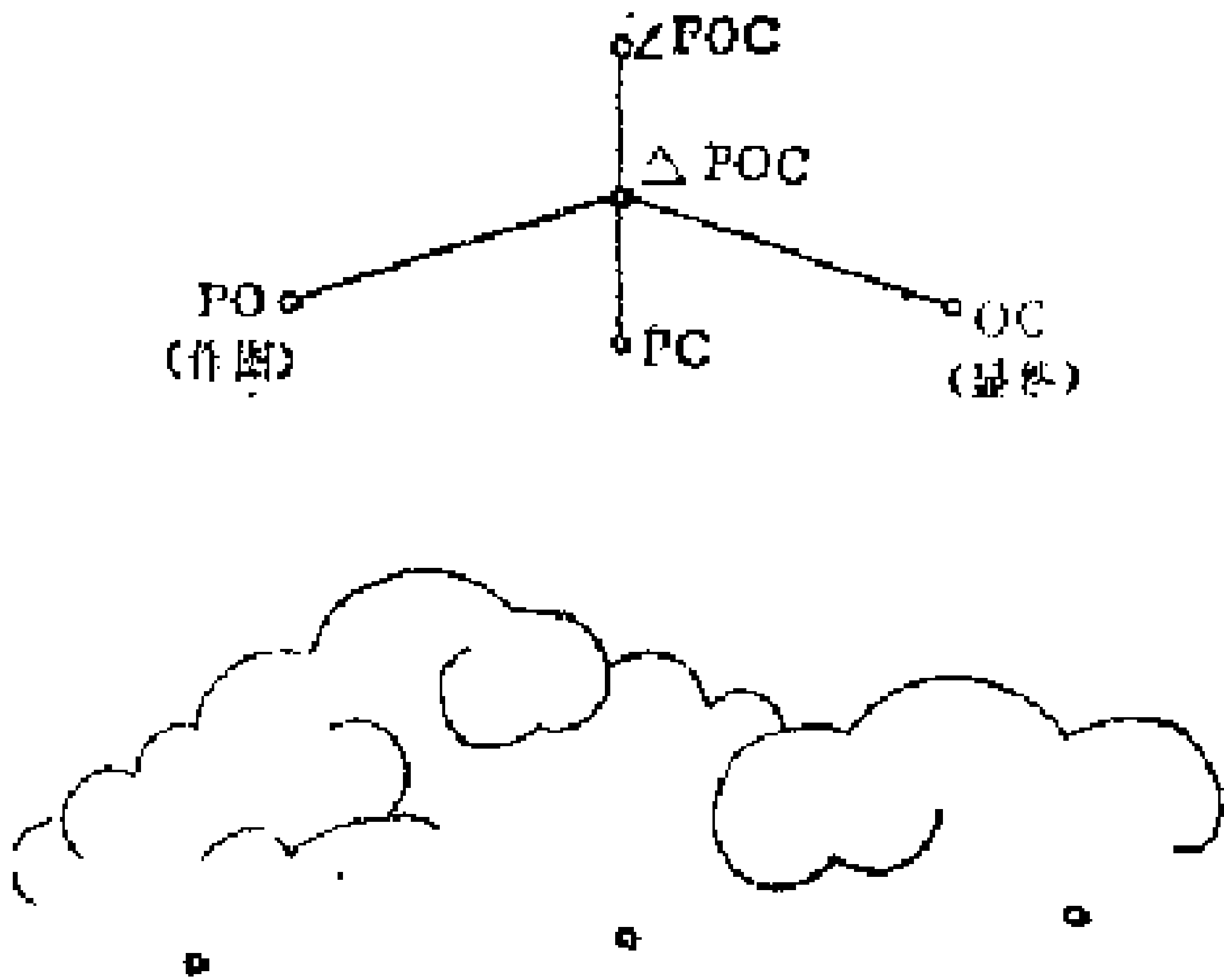


图7.13　从后往前推

（2）问题的复述。我们已经在结论上花了一些时间了。现在该把注意力转到我们想要证明的命题的假设上来。

“假设是什么？”

我们应该重述假设条件使之与重述的结论能协调一致；我们应该让假设和结论尽可能地彼此靠近，而不应该把它们拉开。我们应该证明（按复述的结论）：如果（我们用同样的话把假设复述一下）

$$\angle POA=\angle P'OA \quad 且\angle POB=\angle P'OB$$

则 $\angle POC=\angle P'OC$。

整个命题听起来觉得十分好；因为它显得很和谐。不过我们还得在假设上加上一句重要的话：即这三条不同的直线OA，OB和OC是在同一平面上。这一条应该在某种意义上跟结论有关，但怎样有关的呢？

事实上，在这里需要有这样一个关键的想法，即注意到我们可以让点A，B和C在同一条直线上，而把它们这样放可能会很有好处。（可以选择任何一条不通过O而且不平行于三条给定直线OA，OB和OC的直线。）这样我们就得到了所要证明的命题的另一种陈述。

假设：点A，B和C共线，而且过这三点的直线不含O点。此外

$$\angle POA=\angle P'OA \qquad \angle POB=\angle P'OB$$

结论：则

$$\angle POC=\angle P'OC$$

图7.14把这个命题用符号表示了出来。

（3）从前往后推。在处理假设条件时，我们也可以同样考虑我们在处理结论时曾经考虑过的那些关系，不过现在

∠POC

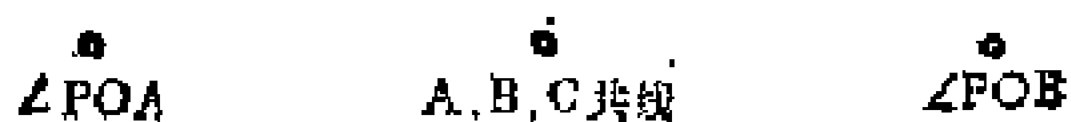


图7.14 介于假设与结论间的鸿沟

我们是按相反的顺序去考虑它们。

因为

$$\angle POA = \angle P'OA \qquad \text{由假设}$$

$$PO = P'O \qquad \text{由作图}$$

$$OA = OA \qquad \text{显然}$$

我们便得出（见图7.12d）

$$\triangle POA \cong \triangle P'OA$$

（见图7.12d）因此

$$PA = P'A$$

（见图7.12e）由完全相同的推理可得

$$PB = P'B$$

（见图7.12f和7.12g）。

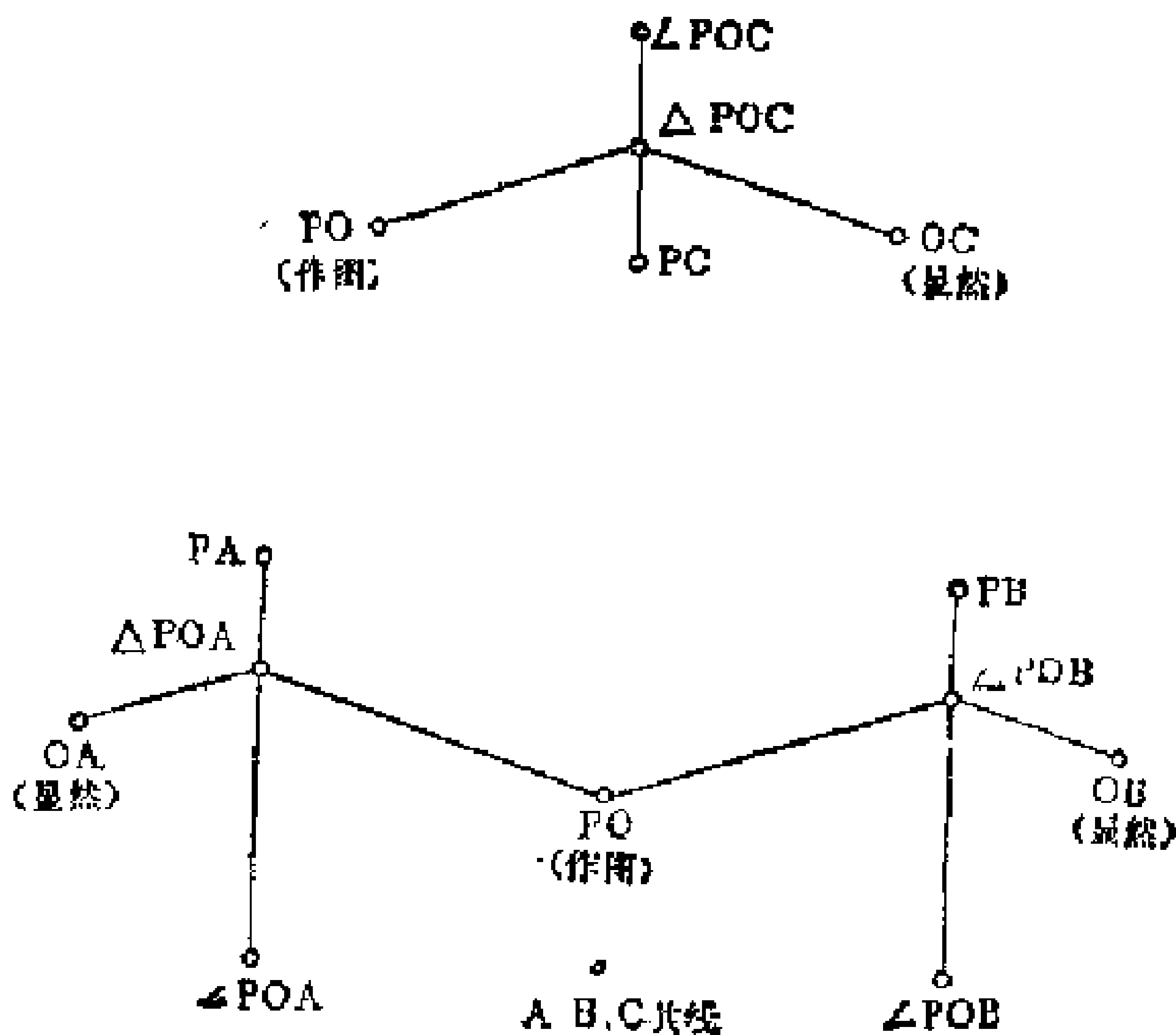


图7.15 从前往后推

上面我们做了从前往后推的工作；方向是从给定的假设条件指向所要求的结论。

图7.15把刚才我们所做的工作和前面按图7.13所做的工作的思维状态显示了出来。如图7.15所示，剩下来需要由已经证明了的等式$PA=P'A$和$PB=P'B$，以及到此为止尚未用上的A，B，C共线的假设，去导出$PC=P'C$。把现在的情况与图7.14所表示的情况相比较，我们是有理由抱有希望的；我们需要在它上面去架桥的那道鸿沟显然已经变得窄了一点。

（4）从两边同时推。证明中所剩下的部分可能很快地

就使解题者（或读者）想到，最后的结论看来马上就会得到了。不过我们还是一步步来吧。

要求的关系式

$$PC = P'C$$

（图7.12c）可由全等三角形得出。（这里是从后往前推。）事实上，我们可以很容易地由已经得到的两个等式

$$PA = P'A \qquad PB = P'B$$

和

$$AB = AB$$

得到全等三角形（图7.12h）

$$\triangle PAB \cong \triangle P'AB$$

（又从前往后推了。）但这些不是我们所要求的三角形。为了得出 $PC = P'C$（这样就结束整个证明了）我们应该知道，比方说

$$\triangle PAC \cong P'AC$$

只要我们知道

$$\angle PAC \quad P'AC$$

我们就能由已经得到的

$$PA = P'A$$

和

$$AC = AC$$

推出上述所要的结果。（现在我们又在从后向前推。）事实上，我们从已经得到的三角形$\triangle PAB$和$\triangle P'AB$全等便知道

$$\angle PAB \quad \angle P'AB$$

（见图7.12i）。（图7.16表示了这一瞬间的思维状态。）

然而，由假设A，B和C共线，可得

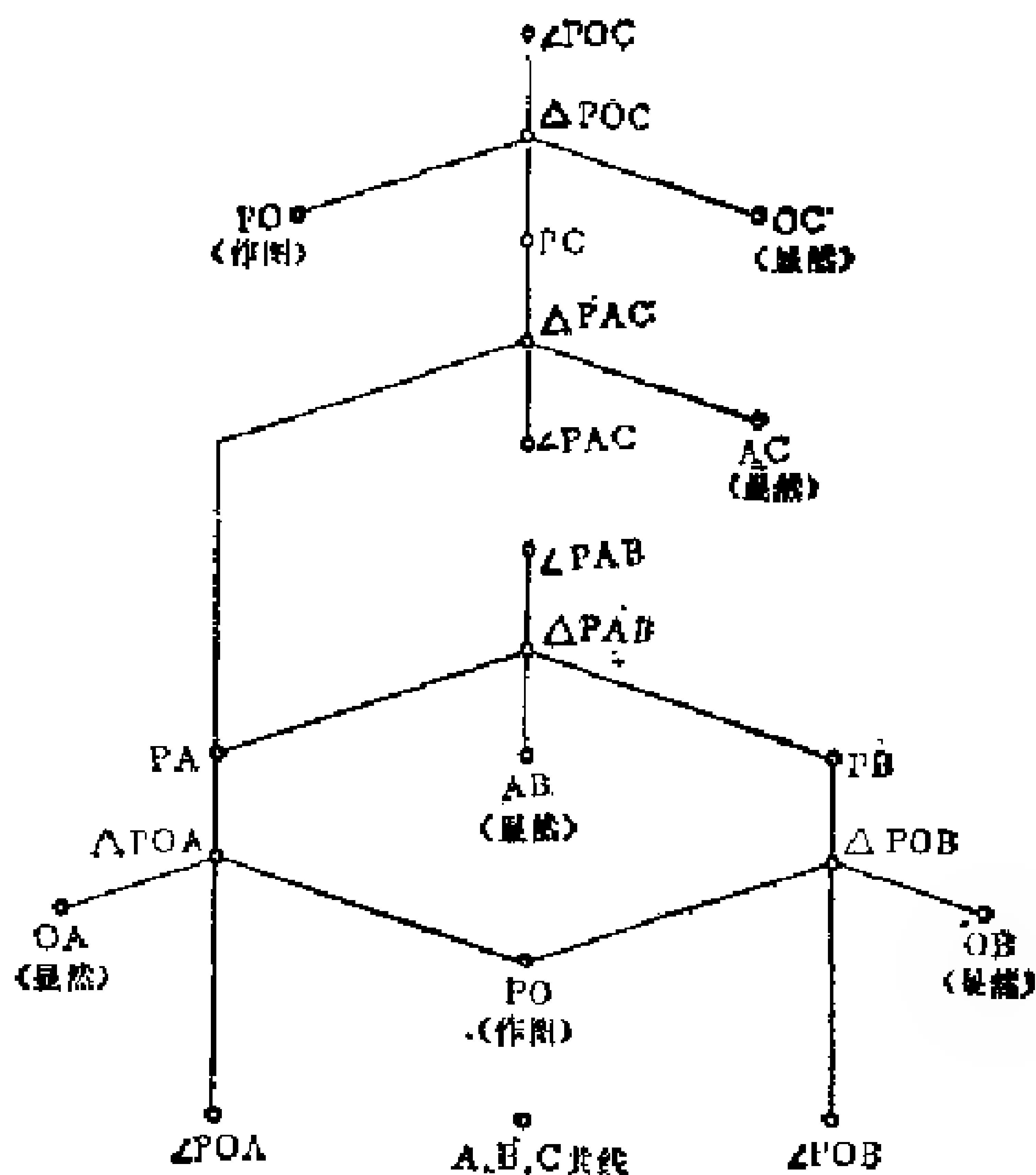


图7.16 从两边同时推

$$\angle PAB = \angle PAC$$

和

$$\angle P'AB = \angle P'AC$$

由此，我们便封上了最后那条沟隙（见图7.17；回顾7.12全图）。

最后这一步，即从图7.16过渡到图7.17值得我们特别注意。只有最后这一步用到了那句不可缺少的重要假设，即

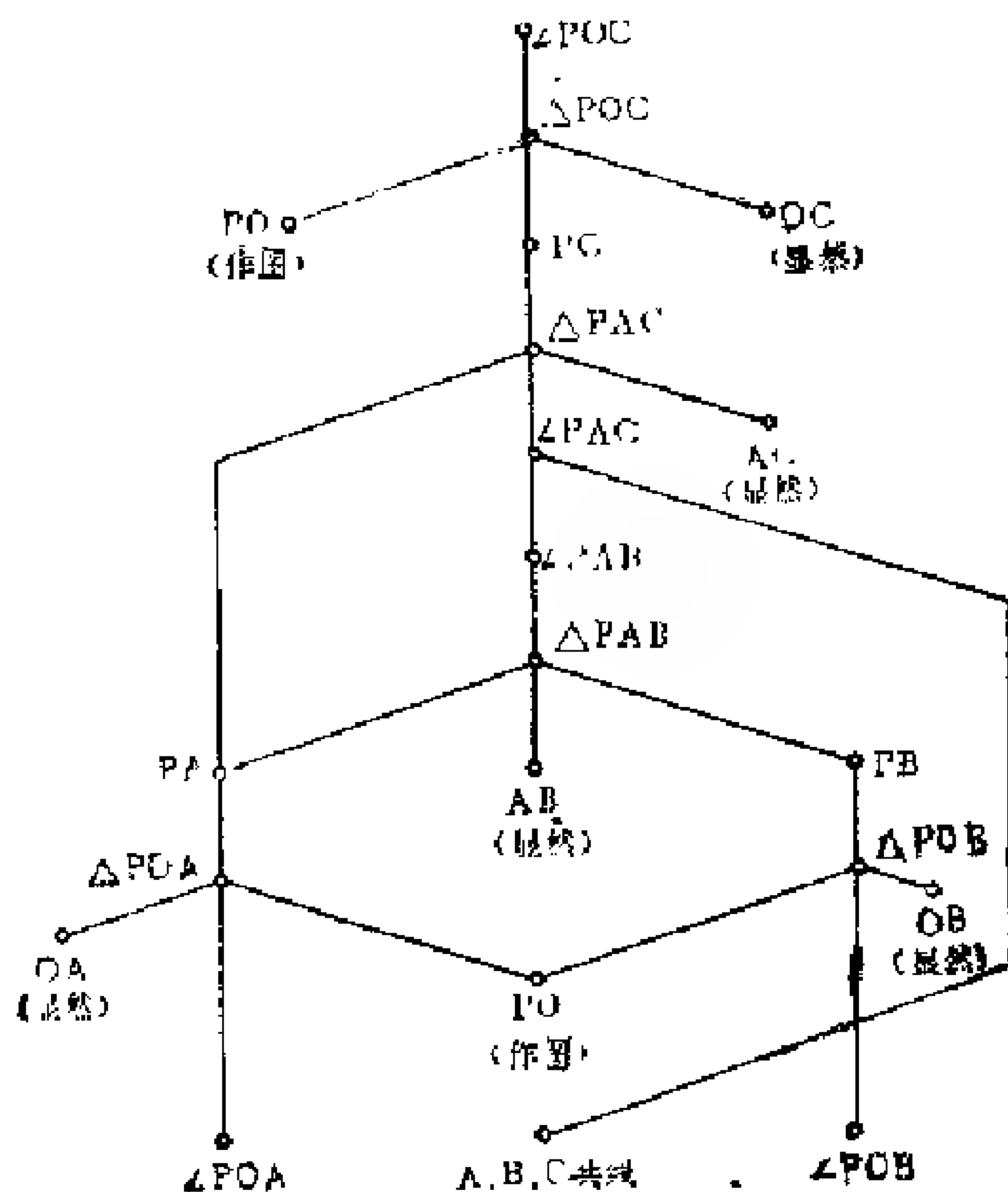


图7.17 封上最后一条沟隙

A，B与C共线。

7.4 初等图式 在§7.2到§7.6中，我们研究了一个求解的问题，而在习题7.3中，我们又研究了一个求证的问题。对这两种情形我们都用了由点和联线组成的图式，去描述解题的进程与结构。我们希望通过比较这两种情形来弄清楚这些图示的意义。

我们来考虑一个"初等图式"，如图7.18所示。

这个图包含了$n+1$个点，其中的一个点A比其余的几个点B，C，D，…和L处在较高水平位置上。处于较高位置的点A分别用线段自上而下地与其余几个点相联。这种样子的初等图式，就是图7.3——图7.8和图7.13——图7.17中所遇到的那些图式所赖以组成的“砖”。这样的一个初等图式表示了什么？

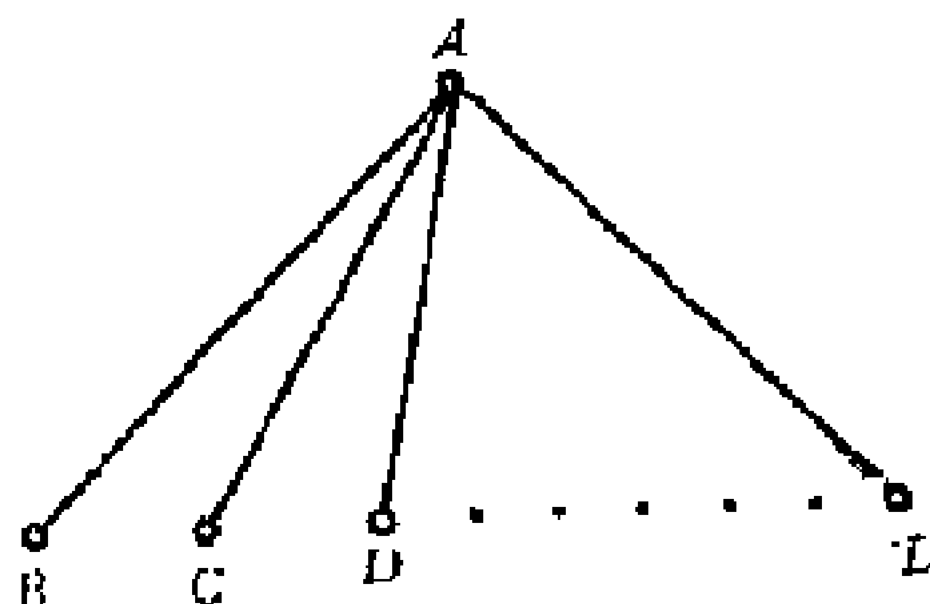


图7.18　如果我们有了B和C和D…和L，我们就能得到A。

当初等图式属于一个象图7.3到图7.8所考虑过的那种求解的问题时，点A，B，C，D，…和L就表示量（长度，体积等等）。而当初等图式属于一个象图7.13到图7.17那样的求证的问题时，这些点就表示一些结论。对于前者，图7.18表示如果给定了量B，C，D，…和L，我们就可以算出量A。对于后者，图 7.8 则表示由结论B，C，D，…和L可以推出结论A。换句话说，在第一种情形初等图式表示：量A是量B，C，D，…和L的一个已知的函数，而在第二种情形表示：结论A是结论B，C，D，…和L的一个推论。我们也可以说初等图式回答了一个问题，对一种情形这个问题是：“根据哪些已知量可以求出A？”而对另一种情形这个问题是：“根据哪些前提能推出A？”

于是我们就能看出我们是怎样用这样的图式去描述任何类型问题的求解的。在实际问题中，点A，B，C，D…和L可以表示我们已有的事物或我们要想得到的事物。图7.18表明，如果我们有了B和C和D…和L，我们就能得到A，或者B，C，D，…和L这些手段合起来便可以达到目的A。所以图式也就回答了下述问题："如果我想得到A，那么我应该首先得到什么？

7.5 更多的问题 虽然我们可以试着用图式去表示任何类型问题的解（见习题7.4），但这样表示有时也可能会较勉强，显得不自然。读者可以去找一些解法容易表示而且用图式搞清楚的问题。

第八章 计划和程序

从一个愿望联想起我们曾经看到过的某些方法、手段，借助于这些方法、手段，我们可以得到如所求的目标那一类的东西。再从这些方法或手段出发，我们又联想到别的一些通向它们的方法或手段，这样继续下去，直到达到某个我们能力所及的起点为止。

汤姆士·霍布斯*：《黎维衣逊》**第三章

§8.1 一个制订计划的模型

本章开头所引的霍布斯的一段话以十分的简洁和准确描绘了一个基本重要的模型——即解问题程序的模型。让我们把这段文字再仔细地读一下，并试图去看清程序的全貌，找到它所适用的各种情况。

我们有一个题目。这就是说我们有了一个目标A，但我们不能立刻就达到它，我们正在寻找某些适当的措施去达到它。这个目标A可能是实际的，也可能是理论的，它或许是

* 汤姆士·霍布斯（Thomas Hobbes，1588—1679）英国哲学家。

** 黎维衣逊（Leviathan）圣经里一个巨兽的名字。

数学的——一个要求的数学对象（一个数或一个三角形等等）或者一个要证明的命题。总之，我们希望达到我们的目标A。

"从一个愿望联想起某些方法、手段"——这是常见的一种思维形态。目标启示了方法与手段，一个愿望通常总是很快地伴随着能导致愿望实现的某些行动的设想。比如，当我想到某些我想得到的东西时，我总是很快想起了能买到这种东西的商店。

让我们回到霍布斯的原文："由愿望联想起某些方法、手段"，这就是说，我们联想到了某个能产生出我们所要求的A的方法手段B。这个联想可能来源于以往的经验："我们曾经看到过由B可以产生出与我们的目标A同类的东西"。总之，我们认为假如有了B我们就能得到A。"而从B这个联想，我们又可引起另一些为了求得B而引出来的方法的联想，比如说C"，于是，如果有了C我们就能得到B。"这样继续下去"——如果有了D我们就能得到C——"直到达到某个我们能力所及的起始点为止"，如果有了E我们就能得到D——但这个E的确是我们已有的！这个E就终止了我们这一串联想；因为E是我们所能把握的，即是"我们能力所及"的，它是给定的，已知的。

我们这一串联想经历了若干个"如果"——"如果那样则这样"，如果我们有了那个，我们就能得到这个。事实上，我们考虑了

如果B则A，如果C则B，如果D则C，如果E则D

而我们在E就停下来了，因为我们无条件地占有E，这里再不需要任何更多的"如果"了。

（这里如果的个数，或步骤的数目是非本质的，几乎没有必要提及它。在我们例子中出现的这四个步骤和五个"靶子"或目标，可以考虑表示成n个步骤和$n+1$个目标。）

上面说的是制定计划。当然，紧接着来的应该是计划的实行。从E出发（它是一个"我们能力所及的起始点"）我们应得到D，得到D以后，我们应继续得到C，由C又到B，而最后由B就到了我们要求的目标A。

注意，制定计划和实行计划是沿着相反的方向进行的，在制定计划时，我们是从A（即目标，未知量，结论）开始，而以到达E（我们已有的东西，已知量，假设条件）终止。而在执行计划时，我们却是从E作到A的，因此目标A，是我们想到的第一件事，也是抓到手的末一件事。如果我们认为朝着目标的运动是前进的话，那么我们就应该认为制定计划这一过程的工作方向是倒退的。这样，由霍布斯所描述的这个解题的重要模型就可以恰当地称为倒着制定计划或从后向前推，希腊的几何学家把它叫作分析，它的意思就是"倒着解"。对比起来，实现计划的工作是从我们已经占有的事物向目标前进（在目前情况下，即从E到A），它称为是前进的或从前往后推，又叫做综合，意思就是"放到一起"①。

读者应该对某些显然的例子具体实践一下制定计划时的从后向前推和实行计划时从前往后推的工作。"如果我付了B这么一笔款，我就能在那家商店里买到我想要的东西A，如

---

① 参见HSI，pp.141—148，单卷，和pp.225—232，从后向前推。

果…我就能得到B这么一笔款。”我希望读者能成功地设计出一个简洁的计划来，而且祝他在把它付诸实现时不要碰到什么挫折。

§8.2 更一般的模型

我们把上一节建立的模型与第七章中曾经仔细分析过并用图7.8表示的例子对照一下。这个例子准确地说明了模型的一般趋向：在制定计划阶段是从未知量到已知量，从后向前推；但在实行计划时却是从已知量到未知量，从前往后推。不过这个例子的一些细节并不完全与此模型相符。

我们先来看第一步。在§8.1的模型中，A可由B得到，最初的目标可由第二个目标得到，即A的获得依赖于B的获得。但是在图7.8的例中，未知量（棱台的体积）的计算是归结到去计算两个新的未知量（两个体积），这里第二个目标并不只是一个，而是有两个这样的目标。

无论如何，如果我们重新考虑了图7.8所表示的例子和第七章里对这个图示的表示所做的各种注记（特别是习题7.4），这对我们去得出§8.1模型的一个推广应该是没有什么困难的。这个模型能包括图7.8的情形和无数种其他有趣的情形。

我们的目标是A。我们不能立刻就得到A，但我们注意到如果我们有了若干东西，B'，B''，B'''，…，我们就能得到A了。可是，我们还没有这些东西，于是我们开始考虑怎样才能得到它们，这样我们就把B'，B''，B'''，…树作我们的第二目标。经过某些考虑之后，我们可能发现如果有了其他几样东西C'，C''，C'''，…的话，我们就能得到所有的第二目标B'，B''，B'''，…。当然，实际上我们并没有这些东

西（C'，C''，C'''，…），但我们可以尽力去得到它们，于是我们把它们树成第三目标。如此下去，我们就是这样织着我们的计划这张网的。我们不得不一再重复若干次地说："如果我们有了那个、那个和那个，我们就能得到这个"，一直到最后我们走到了实处，达到了我们确实拥有的某些东西为止。我们的计划这张网，由所有隶属于我们原来的目标A的附属目标以及它们互相之间的关系所组成。也许会有许多附属目标，这样，要用文字去表达网的细节也许就太复杂了，但是它们可以用我们在第七章建立起来的由点和线构成的那种图示去表示。（例如在§2.5（3）里，原始目标是D，第二目标是a，b和c，第三目标是p，q和r．另外还可以考虑习题7.2。）

我想以上已经十分清楚地叙述了一个一般的模型，它包含了§8.1所描述的模型作为一个特殊情形，我们称它为从后向前推的模型，这是一个制定计划的模型。制定计划是从目标（即我们要求的东西，未知量，结论）开始从后向前，向那些"我们能力所及"的东西（我们已有的东西，已知量，假设条件）推过去。而当我们已经达到那些"我们能力所及"的东西时，我们就要把它们作为"起始点"来用，顺着原路返回去，我们将从前往后朝着目标推过去，这也是计划里的一部分。参见习题9.2（3）．

§8.3　程序

数$\sqrt{3}+\sqrt{11}$和$\sqrt{5}+\sqrt{8}$相等吗？假如他们不相等，哪一个更大些？（出现的平方根均取正值，这是众所周知的。）

只要有一点代数运算的经验，我们就可以很容易地想出一个处理这个问题的计划，我们甚至可以把计划搞得这样清楚和明确，以致值得用一个特殊的词去称呼它——程序。

提到的这两个数或是相等，或是第一个大，或是第二个大。两个数间只能有三种关系，用符号＝、＞和＜表示。这三个关系中只有一个是实际上成立的——现在我们还不知道到底是哪一个，虽然我们希望很快就能知道这一点。我们把三个关系中实际成立的那一个用？表示，并写为

$$\sqrt{3}+\sqrt{11} \quad ? \quad \sqrt{5}+\sqrt{8}$$

不管这三个关系到底是哪一个实际成立，我们都可以把某些代数运算同等地施行到所有这三种关系上。开始，把两边平方，则原来的关系平方后仍然成立：

$$3+2\sqrt{33}+11 \quad ? \quad 5+2\sqrt{40}+8$$

利用这一运算我们把平方根的个数减少了，开头有四个，而现在只有两个了。随后的计算我们将逐个地去掉剩下的平方根，于是我们将看到符号？究竟表示三种关系中的哪一个。

读者不必预先从每一个细节上去了解所规划的运算，但是他应当毫不犹豫地懂得这些计算是能够实现的，它们一定会导致所希望的结果。因此他会同意在这种情况下值得用一个特殊的词——程序来称呼这样一个确定的计划（见§8.5）。

讲了上面这些以后，我们事实上已经达到了本节的目标，不再一定有必要把程序的所有步骤都写出来，不过我们还是把它写出来吧：

$$1+2\sqrt{33} \quad ? \quad 2\sqrt{40}$$

$$1+4\sqrt{33}+132 \quad ? \quad 160$$

$$4\sqrt{33} \quad ? \quad 27$$

$$528 \quad ? \quad 729$$

到这里已经没有问题了，我们知道哪一边比较大，再顺原路返回去，即得

$$\sqrt{3}+\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{8}$$

§8.4 在几个计划中选择

在给定的（任意）三角形的每一边外侧作一个等边三角形，联结这三个等边三角形的中心，证明这样得到的三角形是等边的。

在图8.1中，$\triangle ABC$是给定的三角形，A'，B'和C'分别是作在BC、CA和AB上的等边三角形的中心。要求我们证明$\triangle A'B'C'$是等边的。这个三角形居然总是等边的，也就是说，通过如上作图得到的最后的形状竟会与任意的最初形状无关，这件事看上去很怪，几乎不可置信。我们猜想这个证明不会太容易。

不管怎么样，我们对点A'，B'和C'孤立于图8.1的其余部分总觉得不太自然。然而这个缺陷并不严重。容易看出，$\triangle BA'C$是等腰的，$A'B=A'C$，而且$\angle BA'C=120°$我们把这个三角形及两个跟它相似的三角形引入图中便可得到“更连贯的”图8.2。

但是我们仍然不知道怎样去接近我们的目的。你怎样才能证明这样一个结论呢？用欧几里德的方式？用解析几何？还是用三角？

（1）我们怎样用欧几里德方式去证明$A'B'=A'C'$呢？

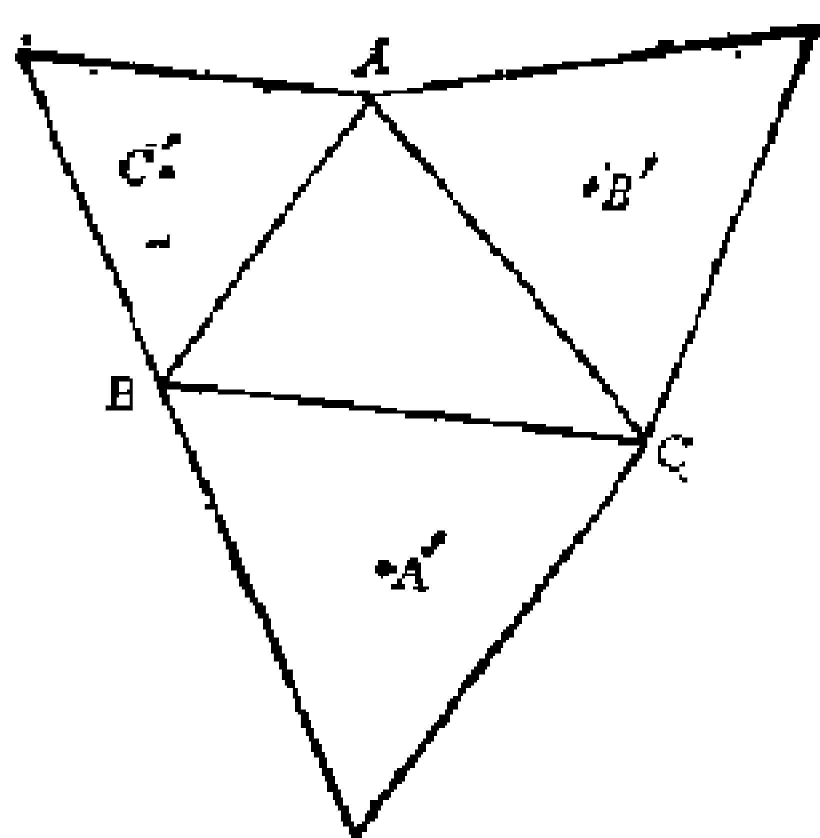


图3.1 三个孤立的点

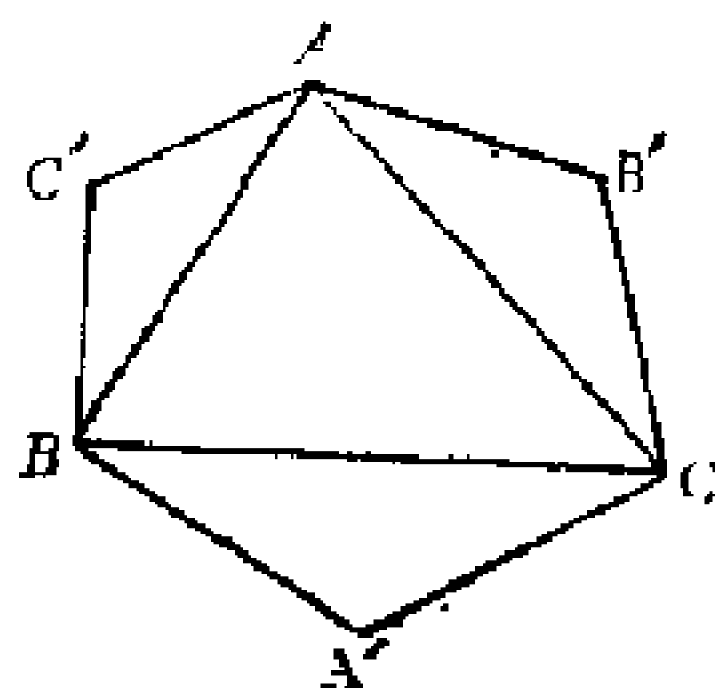


图3.2 更为连贯

利用$A'B'$和$A'C'$是全等三角形的对应边。但是在图中没有这种能用得上的三角形，而且我们也看不出怎样才能引进这些有用的三角形。这真令人泄气——让我们试试别的途经吧！

（2）怎样用解析几何去证明$A'B'=A'C'$呢？我们应当把点A，B和C的坐标看成是已经给出的量，而点A'，B'和C'的坐标是未知量。把这些未知量用已知量表示出来之后，我们也就能把问题里的距离用已知量表示出来，并检查它们是否相等。这当然是一个非常清楚的计划，不过这得处理六个未知量和六个已知量——不，这个方法不怎么吸引人。让我们再试试第三种方法吧。

（3）怎样用三角去证明$A'B'=A'C'$呢？我们应当认为$\triangle ABC$的三条边a，b和c是给定的量，而三个距离

$$B'C'=x,\ C'A'=y,\ A'B'=z$$

是未知量。计算出未知量以后，我们再检查看是否确有$x=y=z$。这个办法看上去比（2）要好一点，因为这里只

有三个未知量和三个已知量。

（4）事实上，我们用不着计算三个未知量，算两个就够了：假如$y=z$，即任意两边都相等——这就够了。

（5）事实上，我们甚至用不着计算两个未知量，如果我们能搞得稍微巧一点的话，那么算一个也就够了。只要我们在把x用a，b和c表出时能设法得到一个关于a，b和c对称的表达式就够了。（一个表达式关于a，b和c是对称的，如果当我们互换a，b和c的位置时表达式不变。如果对x有这样一个表达式的话，那么对y和z也一定有同样的表达式。）

这个计划，虽然它依赖于解题者的机巧和某些新颖的念头，仍然显得比较吸引人——读者应该试着把它做出来（见图8.3和习题8.3）。

（6）我们这个题有什么寓意吗？我想是有的。

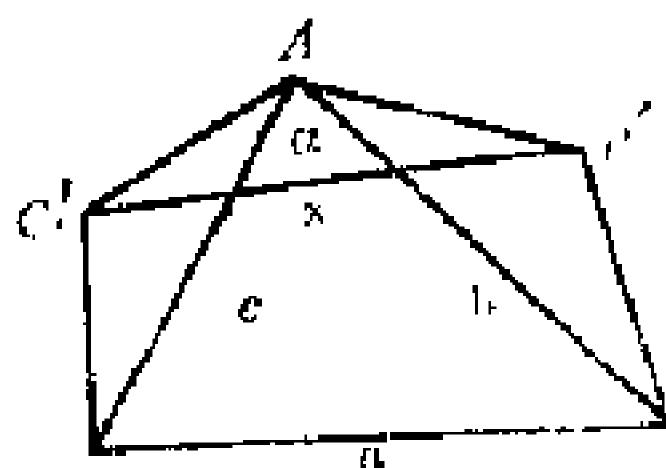


图8.3 集中在一条边上

如果你发现有好几个计划，而其中没有一个是十分有把握的，如果在你面前出现了好几条岔路，那么，在大着胆子沿着某一条路走下去之前最好先对每一条路都稍加探索，因为任何一条都可能把你引向死胡同。

§8.5 计划与程序

我们可以把我们的计划看成一条路，我们正打算沿着它去旅行。可是有各种各样的计划。我们喜欢的是这样的计划，它规划的一些行动将把我们径直地引向目的地。但是不幸我

们并不总是能成功地设计出这样圆满的计划，也很少有那种深远的行动需要去规划。我们也许只能看清这条路上很短的一段，也许可以看到很长的一段或甚至整段都可以看到，直看到目的地。因此我们可以是朦胧地看出我们这条路，也可能是清晰地看清了这条路。另外，我们还估计到而且也准备好了，会有各种意外的事情在途中那些我们完全没有看到或是没有看得很清楚的地方发生。一个期望的意外事件（这种希望不见得总是落空的）就是闪出一个巧妙的想法，它能使我们立刻看清一切。

十分经常的是我们未能形成一个圆满的计划：计划还有些漏洞，某些关键的思想仍然没有抓住。不过我们还是往前走，我们寄希望于在实行计划的过程中会涌现出一些巧妙的或新奇的想法，把漏洞补起来。

我们对这类想法的依赖程度有多大应当看作是计划之间最重要的区别。如果我们丝毫不依赖于这些想法，就能肯定计划里经过深思熟虑并且预见到的那些步骤足以把我们引导到目的地，这样我们就有了一个清楚的、确定的计划，这种计划称为一个程序。我们可能得在那些不完善的计划上花费相当多的时间，直到最后我们成功地把其中某一个发展成为程序为止。

作为例子请比较§8.3和§8.4。

§8.6 模型与计划

在适当的情形下，每一个我们前面研究过的那些模型都提示了一个计划——但不能立即产生一个确定的计划，一个程序。

例如，我们有一道几何作图题。我们试着用双轨迹的模型去解它。这的确是一个计划，但是我们还得用一些其他的想法使问题归结为求作一个特定的点而且还要适当地把条件分开，使得我们能得出关于这个点的两条轨迹。

或者，我们决定按笛卡儿模型即把它归结为解方程，去解一道几何问题。这的确也是一个计划，但我们得用一些别的想法建立起与未知量数目相同的方程，和一些进一步的想法去解这个方程组。

从后向前推是一个非常一般和有用的制定计划的模型。但是为了通过从未知量到已知量的鸿沟，我们显然还需要某些来自题材本身的想法。当倒着制定计划的工作已经成功，展布在鸿沟上的逻辑网络已臻完善，情况就很不同了，这时我们就有了一个从已知量到未知量的从前往后推的程序。

第八章的习题与评注

8.1 往后还是向前？倒退还是前进？分析还是综合？在我们所用的术语中（见§8.2）“从后向前推”这个词用来表示解题的一个确定的策略，一种制定解题计划的典型方法。这是唯一可能的策略吗？它是最好的策略吗？

（1）取“我们的例子”，即我们在第七章作过图式研究的例子。我们最终得到的解题计划是用图7.7来表示的.它是一个由点和线，中间未知量和互相间的联系织成的网，张在未知量和已知量之间原先的那片空白上。我们开始织这面网时是从未知量朝已知量织过去的，这一工作的依次阶段表示于图7.8之中。我们把这种工作方向称为“倒退的”或“从后向前的”（在图7.8中是从上往下）。

最后的计划即整个相互关系的系统（见图7.7——在另外的情形这个网可能更复杂）并没有显示出它是由哪个方向建造起来的。另一个解题者可能是从已知量出发沿着图7.7里箭头的方向去建立的（即我们实行这个计划遵循的方向）。按这个方向去发现计划就称为是前进的或从前往后推。

还有另外的解题者或许他(遇到一个更复杂的问题)可能制定了一个并不总是只在同一个方向工作的计划。从随便哪一端出发，他可能有时是从未知量向已知量那面推，有时又是从已知量向未知量那面推；他也许交替着从两端去推；他甚至可能在那些尚未与任何一端联系起来的中间地带的事物

之间建立某些有希望的联系。由此可知，用从后向前推的办法设计的一个计划决不是唯一可能的方法。习题7.3就是一个具体的例子。

（2）在由图7.8扼要概括的例子里，我们是用从后向前推的方法设计这个解题计划的。让我们把我们的工作和某个解题者的工作比较一下，他不知怎的碰巧用从前往后推的方法制定了同一个计划。

事实上，我们是从未知量开始的。我们问了一些着重于未知量的问题：*你要求什么？未知量是什么？你怎样才能得到这一类的量？你怎样才能求出这一类未知量？根据哪些已知量你就能求出这一类未知量？*于是我们找出了两个“已知量”，体积A和B，根据它们可以推出未知量来，借助于它们未知量可以表成：$B-A$。我们这一阶段的工作表示在图8.4里（它是图7.3的一部分）。

而另外那个解题者的出发点不同，即从已知量开始。他问了自己一些着重于已知量的问题：*你有些什么？已知量是什么？这些东西对什么有用？你怎样才能用上这些已知量？从这些已知量你能推出些什么？*而碰巧他注意到能由已知量得出长度x（即高），把x用a，h和b表示出来（这一点可以从我们很晚得出的一个比例式得到，见图7.6）。他在这一阶段的工作可以用图8.5表示出来。

让我们回到原先的工作，即由图8.4所表示的阶段。把未知量用A和B表示之后，我们就留下来两个新的未知量A和B，和两个新的（辅助）问题：

用已知量a，h和b去计算A。

用已知量a，h和b去计算B。

这是两个明显与我们原来的问题属于同一类型的数字问题。倒退着做下去，我们又问：*你怎样才能求出这样的未知量？根据哪些已知量你就能求出这样的未知量？*

让我们再回到另外那个解题者那里去，他已经到了图8.5所表示的阶段。把x表成已知量a，h和b的组合之后，他就能把x看作是已给的，这样他就有了更多的已知量，这些已知量也许会给他一个更好的机会把原始的未知量找出来。不过，现在是在同一条路上前进，他没有明显的辅助问题，但他必定会问自己一个不太确定的问题：*我怎样去用这个x呢？这种东西对什么有用？从这种已知量我能推出些什么？*

在我们和另一个解题者之间、在由图8.4和图8.5所表示的两种情况之间最引人注目的差别是在前途的展望上。假如我们成功地解出了我们的辅助问题，那会发生什么事？假如他成功地回答了他的问题那会发生什么事？

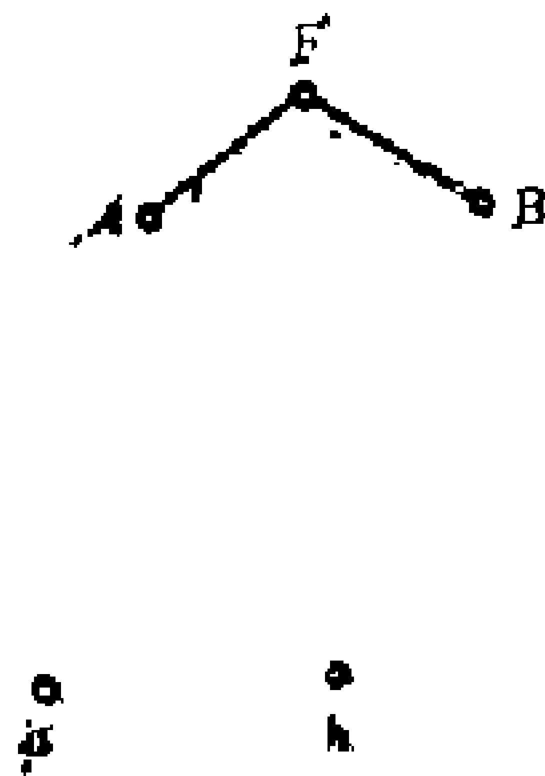


图8.4　倒退

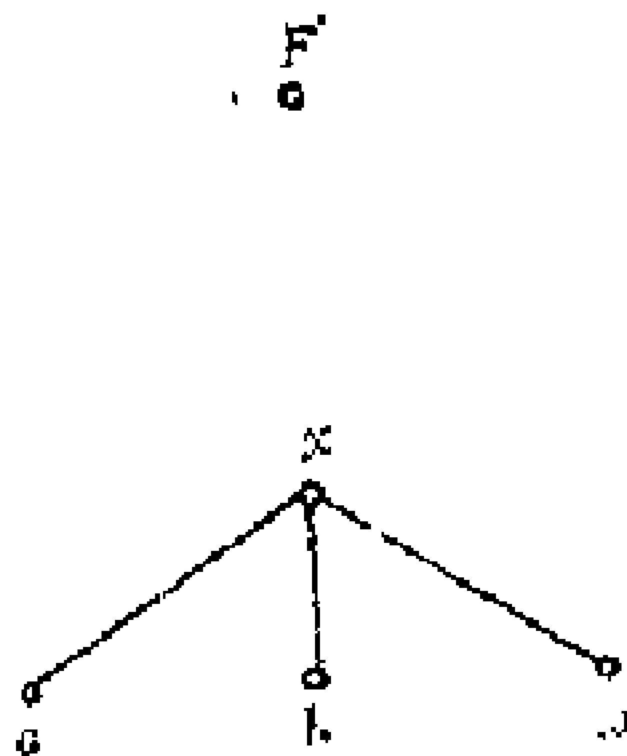


图8.5　前进

如果我们成功地把我们的辅助未知量借助于已知量表示了出来（即用a，h和b表示了A和B），我们也就能把原始未

知量（$F=E-A$）表示出来了，于是我们的问题也就解决了。如果前进型的解题者成功地把某个量譬如y表成了已知量的组合，他仍然面临着一个不确定的问题：他怎样才能用上这个y？当然罗，除去一种走运的情况即F就是y本身，否则他还得继续去解决他的问题。

（3）制定计划的这两种方法，倒退的和前进的都可能成功也都可能失败。从后向前推，我们可能会碰到一个不能解决的辅助问题。从前往后推，我们可以从已知量导出很多很多的量，但这些量可能没有任何用处，我们也许不能由它们得出我们原来的未知量。

制定计划的这两种方法都要求各种活动的配合。然而，当我们从后向前推时，我们可望把大部分时间花在去弄清楚形成的中间问题。而当我们从前往后推时，我们可能是把大量时间花在犹豫于我们该做的问题之间，或者去做一些对我们没有什么帮助的问题。

总的来说，倒退地制定计划，从后向前推或“分析”（用希腊几何学家的术语来说）要略胜一筹。世上也许没有一个一成不变的法则，但是先考虑一下未知量（结论，你要求的东西），然后才是已知量（条件，假设，你已有的东西）看来是明智的。一般总是由未知量着手，从后向前推，除非我们有什么特殊的理由不这样做——当然，要是有一个巧妙的想法促使你从已知量开始的话，那就从头上开始做吧！

（4）虽然还有许多事情要说①，我们这里只再简短的说明几点。

① 参见HSI，pp.141～148，单卷和pp.225～232，从后向前推。

在某些情况下可以做些小的选择。在很多实际问题中，我们要求的东西（作图，求出…）是十分确定的，但是我们几乎不知道哪些东西能用来达到我们的目的。而且也不可能去通盘考查它们，因为它们的数量太多了。由于我们拿不出什么充分的理由说，在这一大堆难办的已知量中必得要从这一条开始，所以我们几乎总是不得不倒退着制定计划。

在倒退着制定计划以后，我们就前进地去实行它（回忆一下§7.5）。但这只是去执行而不是去规划，因为我们先已经把所有的主意都想出来了，现在我们只要把它们付诸实现就行了。我们甚至还会产生这种怀疑，即那些前进地制定计划的人，也可能事先就有了某些主意——这里所谓的事先就有的含意是指隐隐约约地，甚至是下意识的。

有一位女学生这样解释过，光是就材料本身（而没有预先的分析）去进行综合将是困难的——这就有点象你要做一个蛋糕，所有的原料都放在你面前，但是却没有仿照的食谱一样。

当然你也别太拘泥于教条。在从未知量开始从后向前推的过程中，也许你会发现一个由已知量朝前推一步的好机会，这时你也就不必有什么犹疑，去采取这一步骤好了。

8.2 聪明人从结果开始。我的一个朋友，他是一位优秀的数学家，也是一位优秀的哲学家，他有一次告诉我说，当他企图去证明一个定理的时候，他经常是从写下$Q.E.D.$这三个字母开始的（拉丁文*quod erat demonstrandum*的三个字头，表示“这就是要证明的东西”），而写下这个传统上是出现在一个证明的最后的这一组字母*，能使他处在正常的情绪之中。

人们有一句谚语："聪明人从结果开始，而傻瓜在起点就收场了。"

8.3　把§8.4（5）中的计划付诸实施。

8.4　在三个计划中作一个选择　设a表示正圆柱底的半径，h表示它的高。一个与上底的圆周相切（即只有一个公共点）并交下底于一条直径的平面把圆柱的体积分成不等的两个部分。试计算介于下底与相交平面之间的较小的那一部分（即一个"蹄子"）的体积。

这个问题和它的第一个解法都是阿基米德给出的①。

我们用空间解析几何方法去解。以圆柱的轴为z轴，它的下底落在直角坐标系的xy平面上。设分圆柱体积为两部分的平面交xy平面于y轴。于是，圆柱下底的周界的方程是

$$x^2+y^2=a^2$$

而平面的方程是

$$\frac{z}{h}=\frac{x}{a}$$

我们可以或者用积分，或者用卡瓦列里（*Cavalieri*）原理*去计算要求的体积。这两种方法我们都要考虑这个"蹄

---

* 很多作者在证完一个命题后总是写上Q、E、D、表示证明已经完成。

① 见阿基米德《方法》，命题11，pp.36—38，阿基米德著作补遗，T.L.Heath编。

子"的一族平行截面。这里有三组明显的平面：我们可以选择垂直于x轴的，垂直于y轴的或是垂直于z轴的截面。

你选择哪一种平面？解之。

8.5 在两个计划中作选择

（1）在猜纵横字谜的时候，我们犹疑于两个字之间。一个有四个字母，其中一个已知，有三个是未知的，另一个字有八个字母，其中三个已知，有五个是未知的。我们将先找出其中哪一个字？在所提供的数字资料的基础上，能否在两者之间作出合理的选择？

我认为这几乎是不可能的，但下面有一个不同的意见。

*（2）所提问题应该用一种更一般和（尽可能）更精确的形式复述出来。

设一个字由$k+l$个字母组成，其中k个是已知的，l个是未知的。我们着手去找这个字，同时我们也正考虑这一工作的困难程度。

首先让我们假定那k个字母是完全知道的，即它们是什么以及每一个在什么位置上都是已知的（比如例中

$IN\ _\ _R_\ _\ _$

这里$k=3$，$l=5$）。在这种情形，我们可以定义数字N为找出这个字的困难程度，这里N是指由$k+l$个字母组成（其中

---

* 卡瓦列里（B.Cavalieri，1598—1647）意大利数学家。卡瓦列里原理说，如果两个立体有相等的高，而且它们平行于底面，且离底面有相等距离的截面的面积的比是一个常数的话，则这两个立体的体积的比也等于这个常数。

k个字母已指定而且排在规定的位置上）的现代英语惯用字的总数。（当然，任何一个完全确定的N的递增函数，比如$\log N$也同样可以拿来当作困难程度。）

从理论上说，这个定义是显得合理的，因为可能入选的字的数目N越大，从中选出一个的困难当然也就越大。但实践上，这里却有好多麻烦的地方。我们怎样才能肯定一个英文字是或不是“现代惯用”的？这个定义从纵横字谜的观点来看是满意的吗？不管怎么说，实际去确定这个数字N看来是令人厌烦的，而且也没有什么好处。

*（3）这样我们就又被引向一个不同的更高的目标：我们想去确定仅仅只依赖于数字k和l的困难程度，即“其他方面等同”的困难——也许可以说“平均困难”——的困难程度。我们想把具有相同的k和l的一切情形都堆在一起，而只考虑数字已知量k和l。要是我们能达到这个更高的目标的话，困难程度就将是一个k和l的数值函数$f(k,l)$。显然$f(k,l)$关于k应当是个递降的函数，而关于l则应当是一个递增的函数。即使如此，比如，我们也还是搞不清楚$f(1,3)$和$f(3,5)$究竟哪一个更大些。

*（4）如果英文字中的字母是彼此独立的，则具有k个给定的字母和l个可以自由选择的字母的英文字个数N可以简单地表示如下：

$$N=26^l$$

数字N的意义要是照（2）中那样解释，则困难的程度就可以，例如按下面的办法定义

$$f(k,l)=\frac{\log N}{\log 26}=l$$

这样选择的 $f(k, l)$ 倒是跟上面提到的它应有的性质是一致的，但是它又横生出一个严重的问题：这k个已知的字母在多大程度上限制了这l个仍然可以随便选择（当然实际上并不完全可以自由选择）的字母？

能否想出一个多少比较现实的 $f(k, l)$ 的公式，这事大可怀疑。不管怎么说，我们希望这样一个公式应该与刚才提到的那个至少在两个方面是不同的；它应该是k的一个严格递减的函数，而且即使它不能对各种语言都适用，至少也应对几种语言是适用的。

*（5）下面是一个粗略的纯推测的试验性的建议：

$$f(k,l)=\frac{log[26-\alpha k][26-\alpha(k+1)]\cdots[26-\alpha(k+l-1)]}{log26}$$

适当地选择正参数α，可以使上述公式对一种用二十六个罗马字母表示的语言是适用的。这个公式只能用于那些字长

$$k+l<\frac{25}{\alpha}+1$$

的字。

（6）前面这些考虑，也许对启发式思考和我们可能达到的精确度进行了某些阐述，其中也讲了一些道理。

8.6 这确也是一个计划。“我将只是坐在这儿，看着这个图，等着一个好的主意的产生。”这确实也是一个计划。或许有点太原始了。或许有点太乐观了：你似乎有点过于相信你产生好主意的本事了。不过，偶尔这样的计划也是可行的。

8.7 回顾一下过去你解过的问题，用从后向前推的方法

去重新考虑你解出过的或也许解出过的问题。

8.8 别把自己束缚住。我们考虑一个半具体的例子。要求我们去证明一个初等几何的定理，它的结论是这样叙述的："…于是$\angle ABC$和$\angle EFG$相等。"我们必须从某一确定的假设推出这个结论，不过这个假设的细节和本评注的目的并不相干，因此我们略去这些细节。

在解题过程的某一阶段（可能是最初阶段），我们集中于考虑结论：结论是什么？

我们必须证明

$$\angle ABC = \angle EFG$$

怎样才能证明这个结论？从什么假设条件出发才能推出这个结论？

接着我们就想起若干个过去学过的有关事实，几个能推出现在要证明的这个结论的渠道。两个角相等

（1）如果它们是全等三角形的对应角；或

（2）如果它们是相似三角形的对应角；或

（3）如果它们是两条平行线被一直线所截而成的对应角；或

（4）如果它们的余角相等；或

（5）如果它们内接于同一圆内并截取等弧。

我们这里有五个不同的已知定理，每一个都可以用于我们的情况，从这五个不同的假设条件中任取一个都能推出要求的结论。我们可以从任一个开始做起。譬如，我们可以试试（1）。我们可以引进两个适当的三角形$\triangle ABC$和$\triangle EFG$，然后去证明它们全等。如果我们成功了，要求的结论立刻便可以得到！但我们怎样才能证明$\triangle ABC \cong \triangle EFG$呢？

我们对这个问题开始倒退着制定计划。然而我们也可以根据以上所提到的那些定理中任何一个别的定理去作这种倒退着制定计划的工作。它们中的任何一个都有某种成功的机会吗？哪一个成功的机会最大呢？如果我们不能回答这些问题，如果得到的回答仅仅是些含糊的不确定的感觉，那么我们所面临的抉择实在就很难决定了。我们正站在岔路口上，我们必须在几条路中选择一条，每一条路开始的那一段都是足够清楚的，但延伸出去就变得不确定了，而那一头则藏到云里去了。图8.6试图用图形把这种情形表示出来。

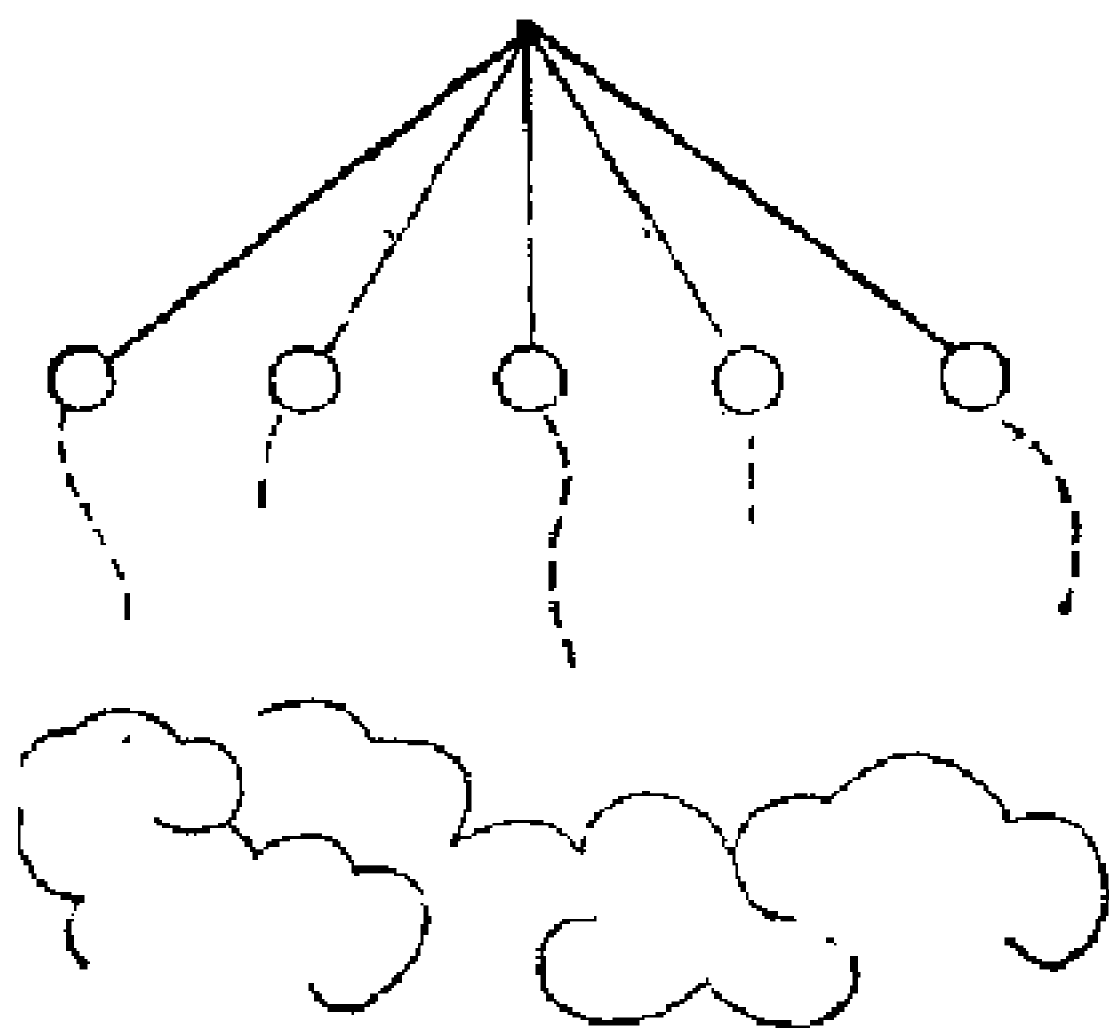


图8.6　一个难以决定的选择

这个例子的目的是想使读者认识到头绪的多样和在几个计划之间作选择的不确定性。在这种情形下我要给予的忠告是：不要过早地限定自己，不要过死的把自己限制在一条路上。做一件事的时候，不要把别的都忘了。

一个好的解题者作计划就象一位将军一样：他认识到袭击计划是可能失败的，因此他并不忽视退却的路线。一个好的计划应当附有某些应变措施，即对付意外困难的某种适应性①。

①见MKP，卷Ⅰ，pp.148—152。

第九章　题中之题

无论是在作图或是在证明中，当我们假定了任何还没有被证明的东西并需要加以论证时，我们就把这些本身有疑问而又值得去研究的东西叫做是一个引理。

普罗克娄斯* 《欧几里德评注》

关于第一书的命题 I

当一个问题出现时，我们应当能够及时地看一下，是否首先去考查某些别的问题会带来好处，并想一下有哪些别的问题，以及按什么顺序去考查它们。

《笛卡儿全集》，第十卷.P.381；

思维的法则，法则 VI。

你对这个问题充其量能做些什么？把它放在一边，先去做另一个问题。

传统的数学教授**

§9.1　辅助问题：达到目的的手段

* 普罗克娄斯（Proclus，410—485）希腊数学家。

** 参见HSI，作者在那里曾塑造了一个外表可笑的数学教授的形象。

沃尔夫根·库勒尔（Wolfgang Köller）对类人猿的某些观察引起我们极大的兴趣。下面我们摘要地叙述一下他的一个实验[①]。

笼子里关着一头饥饿的黑猩猩。笼子外面地上放着一只香蕉。黑猩猩可以把手臂从笼子的栅栏中伸出去，但够不着香蕉，它来回地试着，竭力想够着它，可是都失败了。现在它只好坐在那儿。笼子外面在它够得着的地方还放着一根棍子，不过它似乎一点也没注意到它。突然它跑了过去，抓住那根棍子，笨拙地用它去扒那只香蕉，一直扒到它能够得着的地方，然后它就把香蕉抓过来吃了。

这只黑猩猩解决了两个问题：

A.把香蕉抓过来。

B.把棍子抓过来。

问题*A*是先出现的。最初，黑猩猩对那根不能吃的棍子丝毫没表现出任何兴趣，但是它还是先解决了*B*。问题*B*的解决为它解原来的问题*A*铺平了道路。黑猩猩对*A*有直接兴趣，而对*B*只有间接的兴趣；*A*是目的，*B*仅仅是它的手段；*A*是它的主要的或原始的问题，而*B*只是一个辅助问题（或"有帮助的"问题，子问题）。

下边让我们先一般地概括一下辅助问题这个重要的词的意义：所谓辅助问题是这样一种问题，我们之所以注意到它并在它身上下功夫并不是为了解决它本身，而是因为我们希

---

①沃尔夫根·库勒尔著《猿的智力》，pp.32—34。

沃尔夫根·库勒尔是德国动物心理学家，以对类人猿高级神经活动方面的研究而闻名。

望注意它，对它下功夫可以帮助我们去解决另一个问题，即我们原来的问题。因此辅助问题B是我们到达终点的一种手段，它能修筑一条到达目标的通道，而原来的问题就是我们的终点和目标[1]。

去设计并解出一个合适的辅助问题，从而用它求得一条通向一个表面上看来很难接近的问题的通道，这是最富有特色的一类智力活动。因此，我们没有什么理由拒绝承认黑猩猩的表演是一种智力活动。

下面我们将对辅助问题进行分类，先从一些数学例子着手。

§9.2　等价问题：双侧变形

先从一个例子开始。我们的任务是解下面这个三个未知量三个方程的方程组：

$$(A)\quad \begin{cases} x-y=-4 \\ x+y+z=5 \\ x+y-z=31 \end{cases}$$

由（A）我们可得出另一个方程组（B）：

（1）（A）中第一个方程不动；

（2）（A）中第二个方程和第三个方程相加；

（3）（A）中第二个方程减去第三个方程

于是我们得到一个新的方程组：

$$(B)\quad \begin{cases} x-y=-4 \\ 2(x+y)=36 \\ 2z=-26 \end{cases}$$

---

[1] 见HSI，pp.50—51：辅助问题。

（B）的导出过程表明如果数x，y，z满足（A）必然也满足（B）。反过来也是对的，即满足（B）的数x，y，z必须满足（A）。看起来这似乎是对的，我们可以用不同的方法去证明这一点，例如，可以这样来证：以2去除（B）的后两个方程，可得

$$(C)\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=18 \\ z=-13 \end{cases}$$

现在让（C）的第一个方程不动，而把后面两个方程先是相加后是相减便又回到了（A）。所以，简而言之，数x，y和z只要满足两个方程组（A）和（B）中的一个，则必定满足另外那一个。

方程组（A）和方程组（B）并不是恒同的，它们并不是由相同的方程组成的。因此严格地说，我们不能认为求解（A）的问题与求解（B）的问题这两者是恒同的。但是我们可以严格地说这两个问题是等价的。下面是关于这个词的用法的一个一般的定义：两个问题称为是等价的，如果我们知道任一个问题的解决也就包含了另一个问题的解决。①

从一个问题过渡到与它等价的另一个问题，就叫做双侧（或可逆，等价）变形。例如，从我们原来解（A）的问题过渡到解（B）的问题就是一个双侧变形。这也是一种很有用的变形，因为方程组（B）距离解比方程组（A）更进了一步。事实上，（B）距离（C）比（A）要近，而（C）几乎已是我们任务的终点，因为z的值已经有了，而求出x和y

①HSI，p.53，辅助问题6。

的值就剩下不多的事了。

§9.3 等价问题的链

我们再回到§9.2的方程组（C），对（C）施行加法和减法，可以得出方程组

$$(D)\quad \begin{cases} 2x = 14 \\ 2y = 22 \\ \quad z = 13 \end{cases}$$

因此有

$$(E)\quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 11 \\ z = 13 \end{cases}$$

于是我们得到下面含五个方程组的一个序列（每个方程组有三个方程）

（A），（B），（C），（D），（E）

对每个方程组都提了一个问题，即求出满足方程组的 x，y 和z的值。〔对（E）的情形“问题”已经完全解出来了，因此在这里所谓“问题”这个词不是用它的原义，而是在广泛的意义下去用它。〕这些问题的每一个都与它前面的（也和它后面的）那个问题等价，就好象一根链条一样，每一个环与下一个环都相连，所以我们这里得到了一个等价问题的链。

在我们的链中，（A）是始端，（E）是终端，（A）是原来提出的方程组而（E）表示解。这样我们就有了一条理想的圆满的到达解的道路。从提出的问题开始，我们设计了一个问题的序列，每一个问题都与前一问题等价，而且比前一问题距离解更近，这样从问题到问题地前进，在最后一步我们

就得到了解本身。

不过，即使在数学中，在寻求未知量和为求证而努力时，我们必须解决的事情并不经常都是那么圆满的，因此我们转而考查辅助问题的其他类型。

§9.4 较强或较弱的辅助问题：单侧变形

我们从考虑下面这个仅叙述了一部分的问题作为开始。

A.求一个棱锥的体积，已给……

这里我们假定已知量是足以确定这个棱锥的，但是底和高并不是已知量，这两个量都没有给出来。这一点对下面的论述是很重要的，至于已知量究竟是些什么，则对我们现在的讨论无关紧要，所以我们在这里不把它们都一一列举了①。

我们知道假如给出了棱锥的底和高，则它的体积就可以算出——但是，我们刚才说过，这两个量一个也没有给出。因为没有给出它们，所以我们要设法算出它们。于是我们转向另一个问题：

B.求一个棱锥的底和高，已给…

问题*A*有一个未知量，问题*B*则有两个未知量，它们的已知量都一样（没有列出来）。在这两个问题之间，存在着一个单边的不对称的关系。如果我们解出了问题*B*，即得到了这个棱锥的底和高，我们就能算出它的体积，这样我们就解出了*A*。可是反过来，如果我们解出了*A*，并不意味着我们也能解出*B*。因为从*A*的结果虽然可以知道在*B*的两个未知量之间，有一个简单的关系，但是想找它们中的哪一个也可

①习题4.17是A型问题的一个具体例子。

能会碰到一些严重的困难。所以从解A中得到的要比从解B中得到的少。我们把A叫作是两个问题中较弱的一个，而B是较强的一个①。

我们用一般的术语把前面讲的再重复一下。有两个问题A和B都还没有解出来。我们现在掌握的知识状况是这样：我们知道怎样由B的解推出A的解，但我们却不知道怎样才能由A的解去推出B的解。在这种情况下，我说A弱于B，而B强于A（两个意思其实是一样的）。

从原来的问题过渡到一个较强的或较弱的辅助问题（在这两种情况下它都不与原来的问题等价），这种变形称为单侧变形（或不可逆变形）。在上面的例子里，原来的问题A弱于辅助问题B，所以A到B的变形是单侧的。有经验的读者也许能回忆起几个与这里所给的相类似的例子，在那些例子里这种单侧变形是有用的。

另一种类型，即辅助问题弱于原来的问题的单侧变形也经常是有用的。下面就是一个这种例子：

A.计算未知量x_1，x_2，……，x_{n-1}和x_n，已给……

B.计算未知量x_1，已给……

我们假定所给的条件和已知量完全决定了未知量，而且在A和B这两个问题中，条件和已知量都是一样的，但它们究竟是些什么在这里并不重要，因此我们把它们删略了。显然A的解包含了B的解，但一般说来B的解未必包含A的解：按照我们的定义，A强于B。但是，当我们要解A时，我们把B作为辅助问题引进来常常是会有好处的，这一点我们在第

---

①HSI，p.56，辅助问题8。

三章中用递归方法去解A时已经做过多次了，那里就是把x_1选作初始的未知量，即从辅助问题B开始做起，把它当作通向A的一块跳板。

§ 9.5间接的辅助问题

我们从一个例子开始。考虑以下问题：

A.给定正四面体的棱长，求它的外接球面的半径。

如果我们没有发现通向问题A的其他通道的话，我们可以尝试考虑下面这个问题去接近它：

B.已给等边三角形的边长，求它的外接圆的半径。

由A过渡到B既不是§9.2里的双侧变形，也不是§9.4里的单侧变形。事实上，我们很难看出B的解怎么就会包含A的解或者A的解怎么就会包含B的解——问题A和B并不等价，而且按照我们的定义，也说不上哪一个比另一个更强些。

但是问题A和B也不是一点关系也没有。问题B是问题A的一个类比，它是平面几何和立体几何间重要类比的一个小小的例子。对我们多做人来说，问题B显得比问题A要容易些，我们甚至已经看出、或稍加思考就可以回忆起B的解。在这种情况下，我们很自然地会问：考虑问题B值得吗？考虑B能提供机会去促进A的解决吗？

可能会碰到这种情况，即考虑B并没有对A的解决贡献什么有价值的东西，甚至假若我们清楚地看到A与B之间的类比，而得到了B的完全的解，上述这种情况也还是可能发生。但也可能出现这种情况，从表面上看B好象不会起什么作用，而实际上B却起了作用。例如A和它的类比B的比较倘若使原

来的问题A变得更有趣，在这种情况下，B就是有用的。然而B对A的解决所起的作用可以是很不同的，有的场合A、B之间的类比可能会向我们提供某些有用的启示。例如，在“平面”问题B里，所要求的半径与等边三角形高之比是一个简单的分数$\frac{2}{3}$。这就向我们提示了一个问题：类似的“空间”问题A会怎样呢？所要求的球面的半径与正四面体高的比会是一个简单分数吗？这个问题或类似的问题可能会提供些有用的因素，并为A的解决铺平道路。说不定在解A的过程中，我们会需要四面体的一个面的高，要是这样的话，如果我们知道等边三角形外接圆半径与它的高之间的比，问题B的答案不就给那条解A的链条提供了一个环节吗？

一般来说，即便B既不是与A等价的问题，也不是比A较强或较弱的问题，如果我们对B的考虑也还是能以某种方式有助于问题A的解决，这样的B就叫做A的间接辅助问题。

§9.6 材料上的帮助，方法论方面的帮助，激起的联想，导引，演习

辅助问题可以有数不清的各种各样的方式去协助解出原来的问题。

如果解出了一个等价的辅助问题，也就得出原来问题的完全的解。这对于解出一个较强的辅助问题情况也是这样。（这两类辅助问题之间的差别只有当我们解不出它们时才显示出来。如果一个等价的辅助问题的解决确实是我们力所不及的，那么对我们原来的问题也一样。可是如果一个较强的辅助问题证明是难以接近的，则我们原来问题的前景倒未必就那么阴暗。）

至于其他类型的辅助问题，即使解出来了，也不一定就能保证得到原来问题的完全的解。但它们也许能提供某些材料上的帮助。辅助问题的解的一部分（或甚至解的全部）可能会变成原来问题的解的一部分，它也许给原来的问题提供出一个结论，一种作图法或者是一个赖以得到结论和作出图形的事实等等。

即使连这种材料上的帮助都谈不上时，辅助问题还可能给我们以方法论上的帮助。它可能会提示一个解题方法，给出解的一个轮廓，或是指出该从哪个方向下手等等。一个类比于原来的问题但比原来问题容易的辅助问题往往就是处在这种能提供方法帮助的地位上。

我们也许不能清楚地指出到底原来问题最后所得的解中，哪一部分是来自辅助问题的。或者说，原来问题解的哪一个特征是由辅助问题所提供的。但是十分经常的是辅助问题所激起的联想却对原来问题的解法的发现提供了某些好的想法。它或者是通过类比和对照使得原来的问题变得更有趣或理解得更透彻了，或者是唤起了我们的回忆，从而让我们的思想机器发动起来，使得最终某些有本质联系的事实得以浮现。

辅助问题还可以以另外一些比较微妙的方式去起作用。有时做一道题要涉及到进行判断。继续工作下去可能有两个方向，在我们面前展开了两条路，一条向右，另一条向左。我们该选哪一条路呢！哪一条看起来似乎更有可能把我们引导到解的终端？合理地估计一下我们的前景是重要的，辅助问题在这方面就可以给我们很好的指导。正是我们花在辅助问题上的注意力和工作，以及由此获得的经验，对于我们在正确

的方向上作出判断，起到了引导的作用。

有时，我们可能只是为了演习一下而去做一个辅助问题。譬如说，如果我们原来的问题中涉及了一些我们不熟悉的概念，在这种情形下，先去解某些同样包含这些概念的但比较容易的问题可能是上算的，于是这样的问题就变成了我们原来问题的一个（比较间接的）辅助问题。

虽然从辅助问题那里可以获得这么多不同的东西，但也往往遇到这种情形：我们在辅助问题身上花了很多时间，碰到不少麻烦，而所得甚少。因此，每当我们在卷进这样一类问题之前，应当懂得先去权衡一下利弊，估计一下得失。

第九章的习题与评注

9.1 是辅助问题的可靠来源吗?一个辅助问题有时可能会由所提出的问题“自发地产生出来”。但是也可能会发生这种情形，当我们很想有一个有吸引力的辅助问题时，而脑子里却什么也想不出来。在这种情况下，我们也许希望最好有一张可靠的来源目录表，从中我们可以提取出有用的辅助问题来。

事实上，存在着各种常常用来形成辅助问题的方法，下面我们将考虑最明显的那些，它们在大多数场合下都可以帮你找到某些辅助问题——但是并不保证你所得到的辅助问题都是有用的。

辅助问题在解题过程的任何阶段都可能出现。不过在下面的讨论中我们假定已经开始走了一步。我们已经考虑过而且充分了解了我们问题的那些主要部分——未知量、已知量和条件，或者假设和结论——以及这些主要部分的最显然的划分（分款等等）。但是我们没有看到什么有希望的计划，因此我们希望能有某些更容易接近的或更吸引人的目标。我们知道只要深入地考查问题的那些主要部分就可以带来这样一个目标和一个有用的辅助问题。我们将在下面概括地讲一下最值得我们注意的那些情形。

9.2 Respice finem 要求达到目标的愿望，常常使人

浮想联翩，它使人产生出一系列行动的念头，而这些行动有可能使愿望得以实现。所以说目标启示着手段。因此要注视着目标，不要让它走出视野，它指引着你的思想。

Respice finem的意思就是“盯住目标”。在拉丁文盛行的时代，这是一句流行的格言①。霍布斯把它引申为：“要经常盯住你想要的，把它作为你在追求它的道路上指导你全部思想的东西。”②

盯住目标，我们这样地等待着，直到某些方法的思路浮现出来，为了缩短等待的时间，我们应深入地去了解这个目标：你要求什么？你要的是哪一类的东西？未知量是什么？结论是什么？我们也应当作出努力去想出一些合适的方法。你怎样才能得到这一类东西？你从哪里能得到这一类东西？在哪一家商店才能买到这一类东西？你怎样才能求出这一类未知量？你怎样才能推出这样一个结论？

最后这两个问题，专门涉及到数学的问题，其一是关于求解的问题，另一个是关于求证的问题。下面我们分别考虑这两种情形。

（1）求解的问题。如我们在§9.4所做的那样，我们考虑一个半具体的问题：“求一个棱锥的体积，已知……”。这里未知量即棱锥的体积已交待清楚，而条件和已知量却没有详细说明。你怎样才能求出这一类未知量？我们怎样才能

①引自中世纪拉丁文诗：Quidquid agis Prudentcragas et respice finem。（意即：不论做什么，都要合理地去做，同时要盯住目标）。

②霍布斯：《黎维坦》第Ⅲ章。

算出棱锥的体积？根据哪些已知量你能得到这一类未知量？当然，所提的问题是给出已知量的，但困难的是至少在现时我们不能由给出的已知量去推出未知量。我们真正需要的是更易于处理的已知量；事实上，我们需要另一个更易于接近的具有相同未知量的问题。

如果我们能找到这样一个问题，我们的处境就不一样了。

（2）已经解出的具有相同未知量的问题。如果我们有幸能回想起这样一个问题，我们就可以着手选择它的已知量作为辅助问题的目标。这个办法是极为常用的。下面用我们的（前面提到过的那个半具体的）例子来说明它。

问题的未知量是一个棱锥的体积V。在一个以V为未知量的最熟悉的问题中，已知量是底的面积B和高的长度h。我们知道这个问题的解（$V=\frac{Bh}{3}$），已经把它想起来了。但是我们怎样去利用这个解呢？最自然的事就是设法从所提问题（未解决的问题）的已知量去计算B和h。在作这个尝试时，我们选择B和h作为我们的目标，我们引进两个辅助问题，一个的未知量是B，另一个的未知量是h，而在两个问题中已知量都是我们现在问题里的已知量。（具体例子可见习题4.17，4.18。）

（3）上面这种办法是常常要用的，而且在许多情况下还要反复地应用。

令x表示第一级未知量，即所提问题的未知量。我们正在寻找易于处理的已知量而且我们注意到如果我们有了y'，y''，y'''，…我们就能求出x（利用过去已解得的问题的

解）。我们选择y'，y''，y'''，…作为我们新的目标，这是第二级未知量，如果我们有了z'，z''，z'''，…，我们就能求出y'，y''，y'''，…（利用几个过去已解得的问题的解），于是我们又把z'，z''，z'''，…作为我们的目标，这是第三级未知量。如此下去。我们是在从后向前推（见§8.2）。

为了做好这些准备工作，我们就应当有一个放着一些已解出的（简单的，但是经常有用的）问题的仓库，并且它还应当是货源充足和组织良好的仓库（见习题12.3）。

（4）尚未解出的具有相同未知量的问题。我们可以把这种问题看成是所提问题的一个跳板，把它当作一个辅助问题引进来，然后设法去解它——这种办法可能有好处。但是，别的方面都一样，前景却比情形(2)要差。因为要想明显地从这个问题里获得好处，我们首先应该去解出它，其次还应该能按(2)里描述的那样去用上它。

（5）如果我们一点也看不出怎样才能求出我们现有问题里的那类未知量，如果我们不能回想起任何一个已经解出的具有同样未知量的问题，而且也想不出一个新的我们能处理的具有同样未知量的问题，那么我们可以去寻找一个具有类似未知量的问题。譬如说，如果我们要去求一个棱锥的体积，而我们找不到别的方法，我们可以试试去回想一下如何求一个三角形的面积，把各种不同的途径都考查一下，以寻找某些带有启发性的类比。

（6）求证的问题。我们可以把首面对求解的问题说过的那些稍加改变在这里复述一遍，但很快地概括一下也就行了。

这里最好也从一个半具体的问题开始。我们要证明下述形式的定理："假设……，则此角为直角。"结论是明确提出来了，但它的假设条件没有详述出来。你怎样才能证明这样一个结论？你能从哪些假设条件推出这样的一个结论？这些问题提示我们去寻找一个具有同样结论的定理。其中结论"此角为直角"可由另外一些更容易处理的假设条件推出来。

如果我们有幸想起了一个过去证明过的具有同样结论的定理，我们可以选择它的假设条件作为目标，我们可以试着用我们要证明的定理的假设条件去证明这个回想起的定理的假设条件。

这个办法是经常可用的。在许多情况下，我们可以反复地应用它，并用从后向前推的办法去发现所要的结论的证明。

如果我们碰到一个与所提问题具有相同结论的定理，但它同样也是没证明过的，我们可以设法去证明它。这种尝试可能是有益的，但要仔细估量一下它的前景。

如果我们想不起来任何过去证明过的具有同样结论的定理，也没有想出任何易于处理的新的具有同样结论的定理，我们可以去寻找一个具有类似结论的定理。

(7) 不论问题是哪种类型的，我们都能事先知道在解它时将用到某些过去所得到的知识。然而，特别当问题较难时，我们就不能那么有信心地去预言哪些知识将有可能用上。任何一个过去解过的问题，任何一个过去证明过的定理都可能是有用的，特别是当它的某些点能与我们现在的问题联系上的话就更是如此——但我们没有时间去全部考察它们。前面的讨论引导我们把注意力转向最有可能联系的那些

点。如果我们有一个求解的问题，那么过去解过的问题中具有相同类型未知量的就更有可能用上，而如果我们有一个求证的问题，则过去证明了的具有相同结论的定理也是更有可能用上的。因此，我们应当优先考虑下列问题：如何才能求出这一类型的未知量？怎样才能证明这样一个结论？

9.3 去掉或加上一个分款。当我们的工作进展缓慢或者一点也前进不了时，我们会变得对它不耐烦，而希望有另一个问题去代替它。这时如果知道怎样去修改一下问题，使之能导出一个有关的问题，是很好的。因为对新问题的考虑可能会碰着用上的机会。下面是一张最明显的这类修改的列表。

求解的问题：

(1) 从条件中去掉一个分款。

(2) 在条件中加上一个分款。

上面的(1)使条件放宽了，而(2)使条件变窄了。

求证的问题：

(1) 从假设中去掉一条。

(2) 在假设中加上一条。

(3) 从结论中去掉一条。

(4) 在结论中加上一条。

上述(1)和(4)都使定理变强了，而(2)和(3)则使定理变弱了。

由这些改变引起的后果将在习题9.4和习题9.5中讨论。

9.4 放宽或窄化条件。我们考虑关于对象x(属于同一个范畴）的两个条件$A(x)$和$B(x)$。我们称$A(x)$比$B(x)$窄或（二者是相同的）$B(x)$比$A(x)$宽当且仅当任何满

足A（x）的对象也必满足B（x）。（我们是在"蕴含"的意义下用这些术语的，A（x）与B（x）宽窄一样，意思是它们彼此蕴含。）

（1）放宽条件意思是从所提出的问题过渡到另一个问题，后者较前者有较宽的条件。读者应体会到在前面几章中我们经常在作这一工作（当然，并没有用象现在这种词去描述它）。譬如，在几何作图题中，若仅叙述（或重新叙述）点所满足的一个条件，我们就得出点所描出的一条轨迹，这里只保留一部分条件而舍去了其余的，换句话说，即放宽了条件。又如当我们列出含有几个未知量的方程组中的一个方程时，我们只用了整个条件的一部分（一个必需的部分，一个分款，一个条件等）实际上这也是放宽了条件。

如果我们能做到下面两件事的话，放宽条件就的确是有用的。第一，找出（描述，列出，……）满足放宽条件的所有对象的集合。第二，把那些不满足原来条件的对象从这个集合中去掉。我想读者会回忆起这两个目的在双轨迹的模型是怎样达到的。读者还应当复习一下§6.3(3)以及某些处理起来比较麻烦的习题和评注（亦见习题6.21）。

然而，放宽条件也能换一种不同的方式去应用，熟悉笛卡儿模型的读者可以很容易看到这一点。

（2）窄化条件意思是从所提问题过渡到另一个比原题条件更窄的问题。在我们现在的水平上，我们没有很多机会去使用这个办法，仅举下面一例。

我们须要去解n次方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

其中系数a_1，a_2，…，a_n是整数。当然，先从找整数根开始

比较合适。实际上，这就等于对x增加了附加的要求，即x必须是整数，这里我们就把条件变窄了。但整数根（它必须是最后一个系数a_n的因数）的寻求是比较容易的，而且，如果我们能求得这样一个根，我们就能降低这个方程的阶数，从而便于我们求出剩下的根。（习题2.31是一个具体的例子。）

条件的窄化经常用于较高水平的问题，见习题9.11。

9.5 *考查一个强些或弱些的定理。*我们考虑两个叙述明确的定理A和B。如果我们知道A可由B导出（即如果我们假设B成立即能推出A成立）则称A弱于B或（同义于）B强于A。当我们既不能证明A也不能否定A、既不能证明B也不能否定B时，A、B间这种强弱关系特别有趣。

(1) *考查一个可能的基础。*我们想要证明已给的两个量不相等。例如，我们要证明定理A，它断言

$$e<\pi$$

我们十分幸运，注意到了有一个第三个量，它与给定的两个量都能很容易地进行比较。在我们的例子里，e和π都能很容易地与数字3进行比较。因此，为证明A，我们考虑定理B，它断言

$$e<3 \quad 和 \quad 3<\pi$$

当然，A立即可由B导出。这个新引进的定理B断言的东西更多，因此它比命题A更强，而证明A是我们原来的问题。

注意如果我们要证明两个无理数的不等，我们几乎总是不得不按我们在例中所做的去进行，我们去找出一个把两个无理数隔开的有理数。这样做，也就象例子里所做的那样，

把原来的命题归结为一个更强的命题，发现这个隔开它们的有理数使得新的命题更强些。

这种事情在较高水平的研究中处处可以碰到，为了证明所提出的定理A，我们必须去想出一个更强些的定理B，使得A可由B导出，而由于某种原因B却要比A更容易处理。证明了B，我们就提出了一个“基础”来说明为什么A是对的。当然，当我们在发现可以导出A的定理B时，我们还不知道B是否能证明，我们甚至不知道B是否成立。因此，在这个时候，这个B还不是A的“基础”，只是一个“可能的基础”。所以说，考查A的可能基础B也许是一种可行的方法。

(2) 考查一个推论。我们要证明两个量相等。例如，设S表示一个半径为r的球面的面积，我们要证明的定理A，它断言

$$S=4\pi r^2$$

我们开始先证明一个比预期结果少一点的东西，把它记作定理B，它断言

$$S\leqslant 4\pi r^2$$

（我们可以用球内接多面体逼近球这个事实去证明B。）总之，B显然可由A导出，因此B是A的一个推论，即定理B比定理A要弱些。

但是较弱的定理B的证明，最终却能够引导我们去得到原来定理A的证明。事实上，用以证明定理B的那种方法，也可以给出另一个弱些的定理的证明，即相反的不等式

$$S\geqslant 4\pi r^2$$

（把内接多面体换成外切多面体。）综合这两个弱些的定

理，便可以推出原来的定理。

这样的事在较高水平的研究中也是比比皆是。

如果我们不能去证明一个提出来了的定理A，我们可以去考虑一个我们能证明的较弱的定理B。然后我们可以设法把这个较弱的定理B当作一个跳板，利用由B得到的动力，我们就能达到A。这一点甚至在很初等的定理中都会碰到。例如，我们可以先证明一个较弱的定理B——特殊情形，然后利用B作为跳板，就可以去证明原来的定理A——一般情形。

你知道一个这样的例子吗？

9.6 设m和n是两个已给的正整数，$m<n$。比较下列问题：

A.求m和n的公因数。

B.求n和$m-n$的公因数。

A和B之间的逻辑关系是什么？

如果要求你证明A，你能看出由A过渡到B有些什么好处吗？

利用这个提示求出437和323的公因数。

*9.7 比较下列问题：

A.求函数$f(x)$的极大值。

B.求横坐标x，使得$f(x)$的导数$f'(x)$等于零。

A和B之间的逻辑关系是什么？

你能看出由A过渡到B有些什么好处吗？

9.8 考虑一个三角形并设

O是它的外接圆的圆心。

G是它的重心。

E是过O和G的直线（欧拉线）上的一点，使得$2OG=GE$（G在O和E之间）。

考虑下面两个定理

A. 三角形的三个高交于一点。

B. 三角形的三个高都通过点E。

A和B之间的逻辑关系是什么？

你能看出由A过渡到B有些什么好处吗？

证明B。

*9.9 比较下列两个问题（平方根取正值）：

A.证明

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$$

B.给定正数ε，求使

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\varepsilon$$

成立的正数x。

A和B之间的逻辑关系是什么？

你能看出由A过渡到B有些什么好处吗？

证明B。

9.10 比较下列两个问题（n表示一个正整数）：

A.证明（或否定）命题：如果2^n-1是一个素数，则n必为一素数。

B.证明（或否定）命题：如果n是一个合数，则2^n-1必为一合数。

A和B之间的逻辑关系是什么？

你能看出由A过渡到B有些什么好处吗？

证明B。

9.11 寻找反例。反例意味着否定一个命题，这个命题企图断言某结论对某一确定范畴内的一切对象都成立。而反例就是这个确定的范畴内的一个对象，对它来说，命题的断言

并不成立。反例的寻找具有某些我们应该讨论的有趣特点。下面为了充分说明这一点，我们有时不得不超出一点通常的水平。

*(1) 一个求证的问题。证明或否定下列命题：

如果实的无穷级数$a_1+a_2+\cdots+\cdots$收敛，则无穷级数$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots$也收敛。

在多少干了一阵之后，我们怀疑命题是不真的，于是设法找一个反例去否定它。

*(2) 把求解问题作为求证问题的一个辅助问题。我们要找一个反例，即一个满足(1)的假设条件的无穷序列，它不满足(1)所提的结论。实际上，这我们就面临了一个求解的问题。让我们来看看它的主要部分。

未知量是什么？一个无穷的实数序列a_1，a_2，a_3，…。

条件是什么？它由两个分款组成：

（Ⅰ）级数　$a_1+a_2+a_3+\cdots$收敛

（Ⅱ）级数　$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots$发散

这里我们应注意这个求解的问题是作为一个求证的问题的辅助问题提出来的。

(3) 要求一个（任一个）满足条件的对象。在初等水平上，常常是要求我们去求出所有的解，所有满足问题条件的对象。但在目前的情况下，只须求出一个解，一个这样的对象就够了，一个反例就足以否定所宣称的那个一般命题。

这种不同于一般的情形，可能需要一种不同的策略。对此，莱卜尼兹曾提出过一些意见①："要求的也许是一切

① 莱卜尼兹：《短文与没发表过的未完成稿》p.166。

解，也许只是某些解。如果只要求一个解，我们就要去想出一个与原来条件相容的附加条件，这常常要求较高的技巧。”

* （4）窄化条件。我们来考查一下满足第一部分条件（Ⅰ）的收敛级数，希望能碰上一个，它也满足第二部分条件（Ⅱ）。很自然地我们要从最简单和最熟悉的级数入手。

我们可能首先想到的是具正项a_n的收敛级数。但是，在这种级数里，当n充分大时，有$a_n<1$，因此$a_n^3<a_n$，于是以a_n^3为一般项的级数也是收敛的，不满足条件（Ⅱ）。所以我们必须考虑那些同时具有正项和负项的收敛级数。

这方面最熟悉的情形是一个交错级数，它各项的符号排列如下：

$$+-+-+-+-+-\cdots$$

如果这样一个级数的一般项a_n的绝对值单调下降地趋于0，这个级数就收敛——而这时a_n^3的情况也是一样的，所以它构成的级数也收敛，条件（Ⅱ）再次不满足。于是我们必须从不太熟悉的地方着手了。

由于我们不想到离我们熟悉的东西太远的地方去冒险，所以我们可能会想到再添加一个限制：

（Ⅲ）项a_n（$n=1, 2, \cdots$）的符号排列如下

$$+--+--+--\quad\cdots$$

即使把条件（Ⅲ）加到条件（Ⅰ）和（Ⅱ）上，我们仍然有很大的任意选择a_n的余地。于是我们可能想到再添加一个限制（一个不那么确定的限制）：

（Ⅳ）级数$a_1^3+a_2^3+a_3^3\cdots$象熟悉的级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots$那样的方式发散。

这个自己添加的附加要求（Ⅲ）和（Ⅳ）大大地窄化了条件（见习题9.4）。它们或许能引导找到一个反例，也或许反而限制了它。我想它们总是利多于害，不过读者应试着自己举出一个反例，并对这个问题发表自己的看法。

（5）一个交替的过程。现在也许是谈一谈（每一个想要获得证题能力的人来说都应该熟悉的）一个过程的好机会。（在中学水平通常没有很多机会去获得或训练这样的能力。）

一个求证的问题，就是一个明确叙述的论断A，关于A，我们并不知道它是对的还是错的，我们是处在怀疑的状况。问题的目标就是要排除这种怀疑，去证明A或是否定A。

有时，我们也许会想出一种用两种方式都能够做的办法，它使我们越来越接近证出或是否定不管注定的是什么，从而更接近问题的解决。可是这样的方法是罕见的。如果我们不走运，找不到这种方法，我们就面临着一个抉择：我们到底是应该去证明A呢还是应该去否定它？我们要在这两个不同的方向上作一选择。要证明A，我们就应该去找某些定理或某些策略，由它们去推出A。而要否定A，我们就应该举出一个反例。

一个好的计划应该是交替着去做，一会儿在这个方向，一会儿是在另一个方向。当在某一个方向达到目的的希望逐渐消失时，或是我们在这个方向干得厌倦时，我们就转到另一个方向，如果需要，我们还准备返回来，就这样做下去。根据这两个方向的工作所了解的东西，我们最终可能就会成功。

（6）这个交替的过程还有一个感人的变形，在一些较困难的情况下，我们需要这样的变形，而且它可能达到更高的目标。

如果我们不能证明所提出的论断A，我们试代之以去证明一个较弱的命题（证出它的可能性比原来要大）。而如果我们不能否定所提出的论断，我们试代之以去否定一个较强的命题（否定它的可能性比原来要大）。如果我们成功地证明了命题P，下一步我们将试着去否定一个（适当选择的）比P较强的命题。另一方面，如果我们成功地否定了一个命题P，下一步我们将试着去证明一个（适当选择的）较弱的命题。因此，从两个方向朝A做过去，最后我们或许能够证明了A。但也可以是，我们越过A，或是去证明一个比A强的命题，或是去否定A但还保留它的某些部分去证明一个比A弱的命题。

这样交替地在证明和反例两方面工作，使我们可以得到这些事实的一个比较全面的知识。用它来发现一个定理时，我们不仅知道它是对的（我们已经证出它了），而且也知道它不是那么容易改进的（我们否定了更强的定理）。由此可见证明在科学的建树中所起作用之一斑。（参见波利亚和采果《分析中的问题和定理》，德文版，卷Ⅰ，p. Ⅶ。或*MPR*，卷Ⅰ，p.114，习题14。）

（7）关于交替过程进一步的论述，历史上有名的例子及它的哲学意义，见文献中引的拉卡托斯（*I. Lakatos*）的工作[10]。

9.12　特殊化与推广是有用的辅助问题的重要源泉。

举数论中的一个问题为例。我们要研究正整数n的因数的个数。记为$\tau(n)$。例如（进行特殊化）12有六个因数1，2，3，4，6和12，因此$\tau(12)=6$，这里我们把12的"平凡因数"1和12也算进去了，以下对任意的n也都是这

样。

特殊化的方法之一是考虑特殊的数，例如求出 $\tau(30)$

8。我们也可以按顺序列出 $\tau(n)$，$n=1$，2，3，…，的值组成一张以下列数字开头的表：

$\tau(1)=1$	$\tau(6)=4$
$\tau(2)=2$	$\tau(7)=2$
$\tau(3)=2$	$\tau(8)=4$
$\tau(4)=3$	$\tau(9)=3$
$\tau(5)\ \ 2$	$\tau(10)=4$

把问题特殊化的另一个方法是考虑特殊的一类数。如果 p 是素数，则

$$\tau(p)=2,\ \tau(p^2)=3,\ \tau(p^3)=4$$

于是，我们发现推广到 p 的任意 a 次方幂的答案是

$$\tau(p^a)=a+1$$

如果 p、q 是两个不同的素数，pq 恰好有四个因数1、p、q 和 pq，因此

$$\tau(pq)=4$$

接下去我们可以考虑三个不同的素数的乘积等等。利用推广，我们可以设法求出当 $n=p_1.p_2\cdots p_l$ 是 l 个不同的素数的乘积时 $\tau(n)$ 的值。如此下去，有时考虑特例，然后再推广，这样我们就能发现 $\tau(n)$ 的一个一般表达式。（求出它！）

这就是发现的方法。不仅在数（正整数）论中是如此，在数学的其他分支，更一般的在科学中都是如此。在特殊化时，我们试着去搞清楚这个问题的一个比较具体的容易接近的部分，而利用推广，我们试着把在一个局部范围内观察到

的已经成功的东西扩展出去①。

9.13 类比是发现的另一丰富源泉。在简单的情形，我们几乎可以照抄一个明显的相似问题的解。在复杂一点的情形，一个巧妙的类比也许不能立刻给我们以具体的内容上的帮助，但是它可以给我们指出一个工作的方向。

类比的用途花样是很多的，在前面（和后面）各章中有很多例子都说明了这一点。这里我们只引一例[§1.6(3)]。这个问题是：已给球面三角形的三边，求作它的一个角。这个作图题利用平面几何里一个类似的问题作为辅助问题：已给普通三角形的三边，求作它的一个角。

试回忆几对类比问题。

正如我们指出的那样，还有许多其他利用类比的方法②。

9.14 如果我们失败了呢？我们着手研究一个辅助问题时所抱的希望有可能落空，我们的计划可能失败。但我们花在辅助问题上的时间和精力是不会白费的，从失败中我们也可以学到东西。

我们希望去证明A。我们注意到有一个较A强的定理B，由它可以得到A。于是我们着手去攻B，如果我们成功地证明了B，A也就证明了。可是我们失败了，这很让人扫兴，但我们关于B的经验会引导我们对A的前景作出一个较好的判断。

---

①见HSI，推广，pp.108—110，特殊化，pp.190—197；和MPR，第二章各处。

②见HSI，类比，pp.37—46；和MPR，第二章各处。

我们希望去证明定理A。我们注意到一个定理B，这是A的一个推论，它看上去比A要容易处理，于是我们着手研究B。如果我们成功地证明了B，我们就可以利用它作为跳板去证明A。实际上，我们设法证明了B，但是想把它作为一个达到A的跳板的尝试却失败了。因此希望落了空——但我们关于B的经验却可以引导我们对A的前景作出一个较好的判断[1]。

9.15　更多的问题。注意到了一个辅助问题在解某个问题时有用，试去搞清楚为什么它有用以及它是从什么地方来的。

为什么？弄清楚问题与辅助问题之间的关系，见习题9.6—9.10。

来自何方？辅助问题是由倒推着工作（从后向前推）、或推广、特殊化、类比得出来的吗？它能从它们得出来吗？或者还有什么别的（不寻常的）源泉？

[1] 参见MPR，特别是卷Ⅰ，pp.18-20。

第十章　想法的产生

> 我的思想被一道闪电击中，愿望便在这一闪中得到了满足。
>
> 但丁*：《乐园》，第三十三章

§10.1　一线光明

一个问题的解法可能会很突然地出现在我们面前。常常在长时间反复考虑一个问题而没有任何明显的进展之后，我们突然得到一个巧妙的想法，好象掠过了一道灵感，看到了灿烂的阳光。这有点象在深夜走进一家生疏旅馆的房间，不知道灯的开关在哪里，为了找到开关，你跌跌撞撞地在黑屋子里摸来摸去，你碰着了乱七八糟漆黑的各种东西，撞着了这个或那个桌椅板凳。而一旦你摸到了开关，把灯打开，刹那间一切就都清楚了。那些乱糟糟的东西现在都变得条理清晰，形象宛然，摆设得体，秩序井然。

解题的经验也是这样。有时突然一步便澄清了一切，驱散了原来的混沌、紊乱、分散与捉摸不定，而带来了光明、秩序、相互联系与明确的含义。

可是，在这种事情中，点滴经验也许比累牍的描写更有价值。为了亲自取得经验，我们应当静心地去研究一个具体

---

*但丁（Atrghiesi Dante，1265—1321）意大利名诗人。

的例子。初等的数学例子或许最宜于给我们带来发现性的工作，带来发现中的不安和喜悦，并“使我们的眼睛习惯于去清晰地看出真理”。（最后一句话是借用笛卡儿的。）

§10.2 例

我要冒昧地向读者谈一个小小的经验。我将叙述一个简单但又不太平常的几何定理，并把一系列引导到它的证明的想法重新整理出来。我将缓慢地，非常缓慢地去作，逐个地，一个接一个地把线索揭示出来。我想在我讲完整个情节之前，读者就会抓住主要想法了（除非有什么特殊情形）。但是这个主要想法比较出人意外，所以读者在这里可以体验到一个小小发现的喜悦。

A.如果三个有相同半径的圆过一点，则通过它们的另外三个交点的圆具有相同的半径。

这是我们要证的定理。它的叙述简短而明确，但是没有把细节充分清晰地表达出来。如果我们作一图（图10.1），并且引进适当的符号，便得到下列更明确的复述：

B.三个圆k，l，m具有相同的半径r，并通过同一点O。此外，l和m相交于点A，m和k相交于B，k和l交于C。则通过A，B，C的圆e的半径也是r。

图10.1画出了四个圆k，l，m和e以及它们的四个交点A、B、C和O。这个图画得不甚圆满，它既不简练，也不完全：有些东西好象漏掉了；某些本质性的东西似乎没有画进去。

我们处理的是圆。圆是什么？圆由中心和半径确定，它所有的点到中心的距离都等于半径的长。我们在图上看不到这个共同的半径r，这样我们就没有把假设中的一个基本部

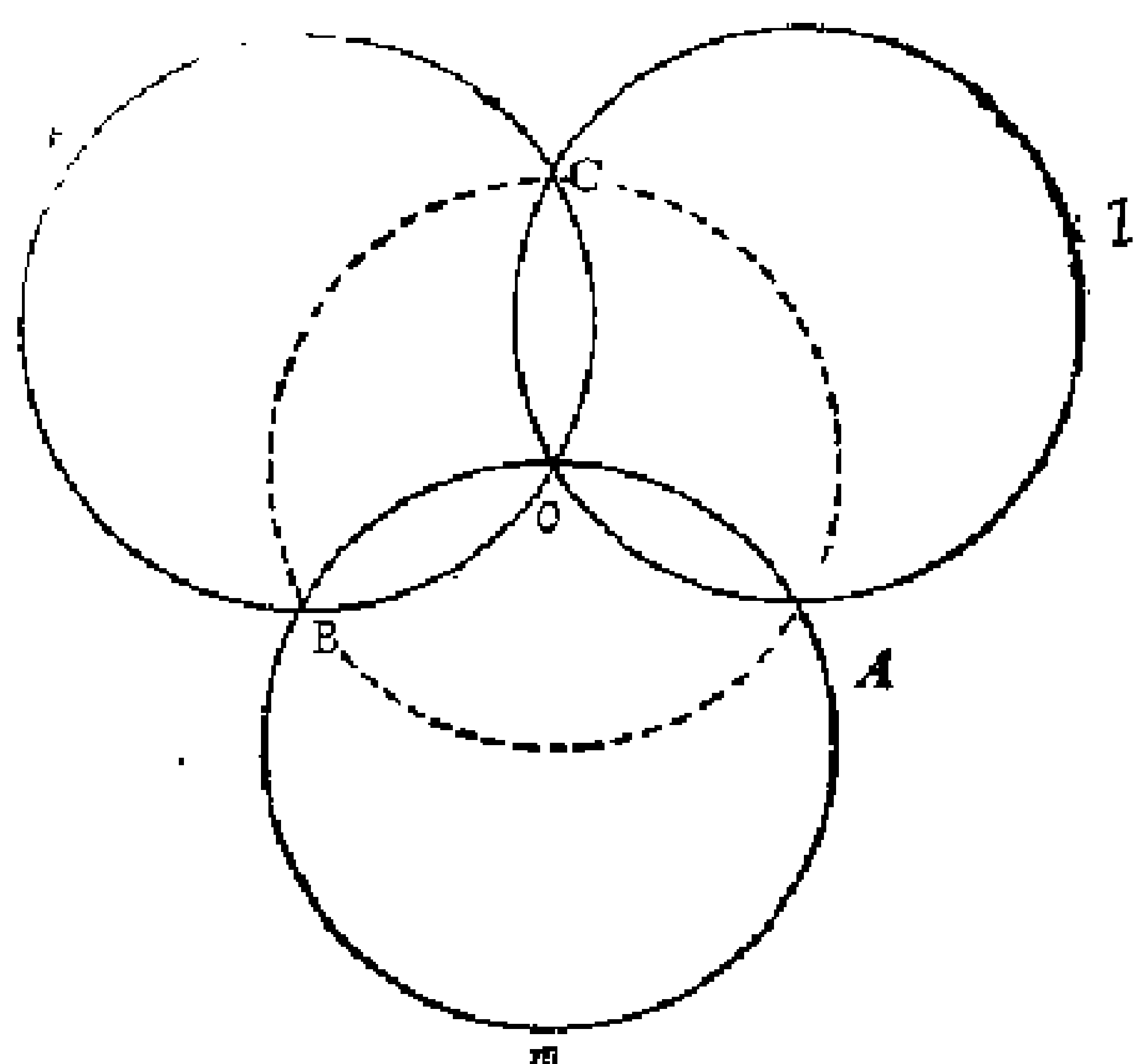


图10.1 三圆通过一个点

分考虑进来。因此让我们引进各圆的中心，k的圆心K，l的圆心L和m的圆心M。我们应当在哪儿画出半径r呢？我们似乎没有理由把三个给定圆k，l和m中任一个及三个交点A,B和C中任一个放在优于其它圆及点的地位上，于是我们就把三个圆的中心分别与三个交点联结起来：K联结B，C和O，等等。

结果得到的是一张拥挤的图（图10.2）。这里面有这么多的线段和弧，使得我们很不便于去"观察"它，所以这张图"还是站不住脚"。它有点象老式杂志上的某些画面，这种画有不止一种效果，如果你按通常的方式去看它，它是一个图象，可是如果你转到另一个位置再换一种特殊方式去看它，那么另一个图象就会突然闪现在你面前，并对第一个图象发表某些诙谐的评论。你能从我们这张塞满了直线段和圆

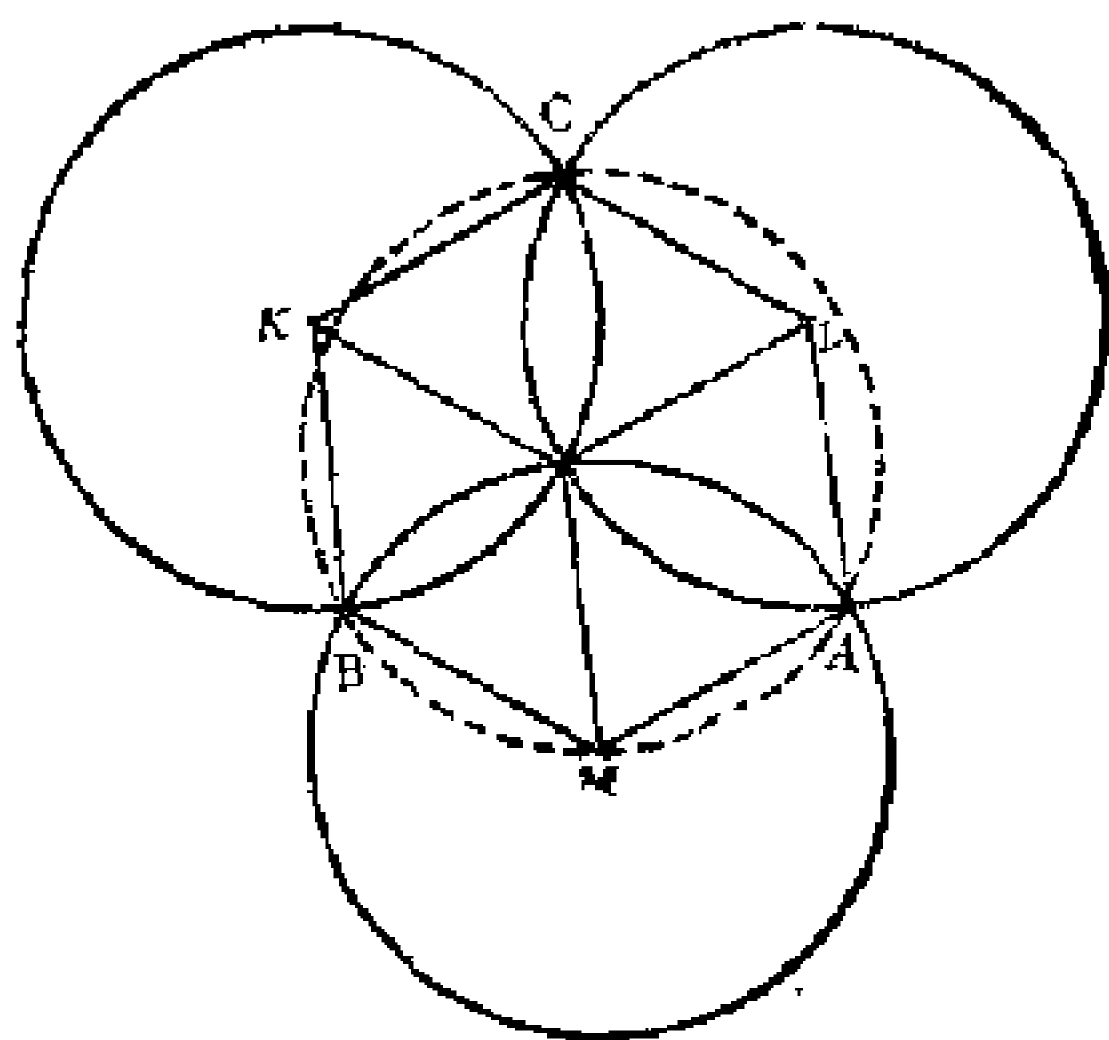


图10.2 太拥挤了

的图中看出有第二种含意的图象吗？

…………

我们也许会一下子看出隐藏在塞满了的画面里的真正图形，也或者可能是逐渐地把它认了出来。我们可能是在努力解题的过程中，也可能是在一些次要的、非实质性的机会中达到了它。比如当我们想去重画一下我们的不完满图形时，我们也许会注意到整个图形是由它的直线形部分确定的（图10.3）

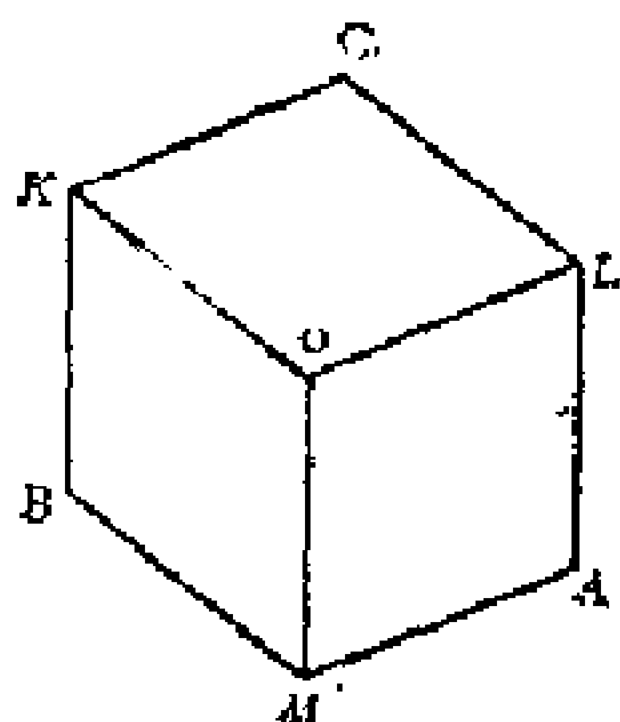


图10.3 它使你想起了什么？

注意到这一点看来是重要的。因为它确实把几何图形简化了，而且还可能改进了它的逻辑状况。它使我们能把定理复述为下列形式。

C．如果九个线段

$$KO, \quad KC, \quad KB,$$
$$LC, \quad LO, \quad LA,$$
$$MB, \quad MA, \quad MO,$$

都等于r，则必存在一点E，使得下列三个线段

$$EA, \quad EB, \quad EC$$

都等于r。

定理的这种叙述法把我们的注意力引向图10.3。这个图形是有吸引力的，它使我们想起一些熟悉的东西。（想起什么？）

当然，在图10.3中，由假设，某些四边形如$OLAM$的四条边相等，它们是菱形。菱形是我们熟悉的对象，认出它之后，我们就能更好地“观察”这个图形了（整个图形使我们想起什么？）

菱形的对边是平行的。依据这一点，我们就能把图10.3中的九条线段分成三类，同一类中的线段譬如象AL，MO和BK是彼此平行的。（现在这个图形使我们想起什么？）

我们不应该把我们要去求的结论忘掉了。让我们假定这个结论是对的。在图中引进圆e的中心E，和以A，B，C为端点的三条半径，我们就得到了（假设地）更多的菱形，更多的平行线段，见图10.4。（现在整个图形使我们想起什么?）

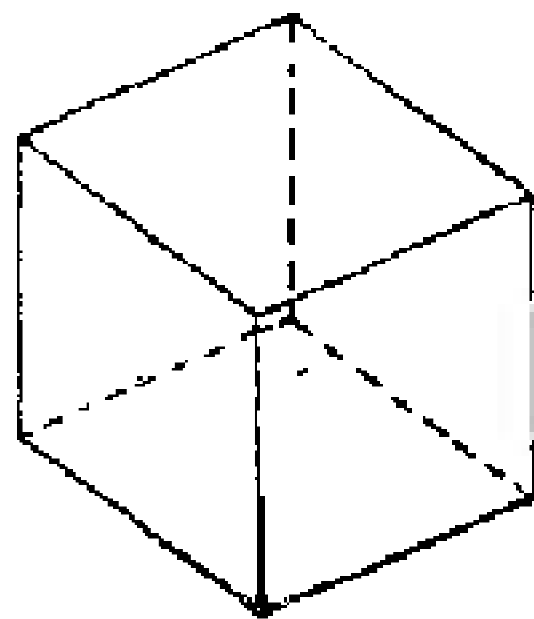


图10.4　当然！

…………

当然，图10.4是平行六面体十二个棱的一个投影图形，

它的特殊性在于所有的棱的投影长度都相等。

因此，图10.3是一个“不透明的”平行六面体的投影，我们只看到了它的三个面，七个顶点和九条棱，还有三个面，一个顶点和三条棱在这个图中看不出来，所以图10.3只是图10.4的一部分，但是这一部分就决定了整个图形。如果这个平行六面体和投影方向是选择得使得九条棱的投影如图10.3所示那样都等于r（根据假设它们应该这样），那么剩下的三条棱的投影也一定等于r。这三条长为r的线是从看不见的第八个顶点的投影出发的，而这个顶点的投影E就是通过点A，B和C半径为r的圆的中心。

这样，我们就证明了定理。这个证明意外地用了一个美术家的概念，把平面图形看作是立体的一个投影。

（这个证明用了立体几何的概念。我希望这样做没什么大错误，即使有错也容易纠正。现在我们可以很简单地把中心E的位置定下来，而且很容易不依赖任何立体几何的知识去检查EA，EB和EC的长度。不过这里我们不再这样做了！）

§10.3 辅助的想法的特征

上面的讨论列举了各种辅助想法的特征。我们特别缓慢地叙述了它产生的过程，不是得意扬扬地夸说，而是慢条斯理的铺陈（这样作是为了使读者尽量能分享我们的发现）。此外，我们的例子存在某些片面之处，但这在任何例子也是难免的，因为现实世界的各种现象实在太丰富了。不过，只要读者怀着谅解的心情，从适当的角度，在适当的范围内，以他自己的经验为背景来考虑这个例子，那么它也许能够用来对经常出现的各种特征作一个有用的描绘。

辅助的想法往往总是自发地产生的。它带来了某些显著的新因素，改变我们的已成之见。并且随之使人产生出终点在望的强烈信念。

自发性是它的一个很大特征，但这点是比较难以描述的。如果设想读者遇到了这样的事：从图10.2那些纠缠成一堆的线段和字母中，平行六面体的形象出乎他意料之外地“跳”出来，那么他就会很好地理解这意味着什么了。可能他在某种程度上也将理解灵感这个字的意义，以及怎样去解释好象是一个内在的心声或者一个超自然的神在启示一样的一个深刻的想法突然出现。

在上面那个例子里，出现的显著的新因素就是关于平行六面体的那个想法。一个立体图形的出现，给一个平面的几何问题的解带来了决定性的一步，这当然是比较新奇的。在普通常见的问题中，那个决定性的新因素常常在问题的所属范围之内就可以找到。如果这个问题是一个平面几何问题，一般地我们总以为这个新因素将是在图形上加进一条新的辅助线，或是突然想起了一个有关的定理，或是诸如此类的事。

在这个例子里，已成之见的改变是非常引人注目的。圆隐退了，消失在背景上，直线走到前台来了。但是我们已不再把它们看成是半径，现在我们把每一样东西都跟平行六面体去联系。过去的半径，它们的终点，图形里的四边形现在都有了新的意义，它们现在表示的是立体的棱，顶点和面。这里，我们对构成问题的这些因素的认识方式的变化是惊人的，但却是典型的。几乎任何一个问题的解法中的决定性想法都要给我们带来同样的整个概念的革命性的重建。一旦想

法浮现出来，这些因素就得扮演新的角色，得到新的意义。在几何问题的解中，这些因素被重新组合；它们被组合成若干三角形，或者有对应边的若干对三角形，或者是菱形，或者任何其他能服务于我们研究目的的熟悉的图形。一条线在想法出现之前仅仅是一条线，现在则得到了某种意义：它变成了某个三角形的一条边，而这个三角形跟另一个三角形合同是解法的关键所在；或者它变成了两条平行线的横截线；或者它以某种方式配置在一个更广的图形里。总之，在想法出现之后，我们看到了更多——更多的含义，更多的目的，和更多的关系——想法的出现就象在黑屋子里打开了灯！

这个辅助的想法还使人产生出目标在望的信念。一个突然产生的、展示了惊人的（处于戏剧性的重新排列之中）新因素的想法，具有着一种令人难忘的重要气氛，并给人以强烈的信念。这种信念常表现为诸如"现在我有啦！""我求出来了！""原来是这一招！"等惊叹。在现在的情况下，如果你仅仅是看到了平行六面体而没有看出它能引导到解，你就还没有具有这种决定性的想法。你还缺少点什么。你并不需要详细地看到这个平行六面体怎样引导到解，但是你应该有一个强烈的感觉，就是它将会引导到解。

§10.4 想法有赖于机会

你有了一个想法吗？如果你回答说："有了"那么你是走运的。你不能强迫辅助的想法出现。我认真地对待这个问题。我把它向自己提出来。我决定要去做它。我努力去体会它。我全神贯注在它上面，我正在等着一个辅助的想法；但是它会来吗？也许立刻就来，也许得等一会才来，也许根本

就不来。

我们需要辅助的想法，我们自然很希望有一个辅助的想法能供我们使用。但是实际上，它们才是我们的主人，而且它们是任性的，固执的。它们可能出乎意料地闪现在我们面前，但经常是姗姗来迟，而有时干脆就让我们白等。

想法只有当它们要来时才来，而不是我们要它们来就来，等待想法就象是等着抽彩票时中奖。

如果想法完全是偶然得来，那么问题的解主要就靠机会，许多人相信是这样。撒麦尔·巴特勒①有四句妙语：

世界上所有的发现，

都不是理性和智慧的结果；

只是那些走运的人们，

由于误会或在漫不经心中发现了它们。

很难相信这样一个流传很广的见解是没有根据的，完全错误的。但是它就完全对吗？当我们要解一个问题时，我们应该只靠运气吗？我希望在读过前面各章之后，读者会有自己的见解。

---

① 撒麦尔·巴特勒（Samuel Butler，1612—1680）英国诗人。

第十章的习题与评注

10.1 思想的自发性。一段引语和一个注解。

(1) 下列这段话引自汤姆士·佩恩[1]著《理性的时代》，第一部分。

任何一个从观察自己这个角度去考查人类智力的状态及其发展的人，都不能不看到两种不同的所谓思想：一类是根据本人对外界的反映及本人的思维活动而产生的思想，还有一类是自动闯进我们脑子里的思想。如何对待这些志愿的来访者？我制定了一条规则，即如果值得的话就要殷勤接纳并尽可能小心地去检验它们；正是从它们那里，我得到了我几乎全部的知识。

(2) 李希坦伯格注意到我们不应说"我在想"而不如说"在想着"，就好象我们说"下雨了"或"打雷了"。李希坦伯格认为有一种智力的自发活动，我们对它就象对自然界的巨大力量一样还不能完全支配。

我们也可以说我们的智力有时就象某一类马或骡子，某种奇怪的动物，为了让它干活——它经常是不给干——我们必得顺着它，偶尔也揍它一顿。

---

[1] 汤姆士·佩恩（Thomas Paine，1737—1809）英国政论家。

（乔治·约瑟夫·李希坦伯格，Georg Christoph Lichtenberg，1742—1799，德国物理学家和作家；《格言家》可能是他最著名的著作。）

10.2　两个试验。在纵横字谜上花点时间（但不要太多）是值得的，由此我们能学到某些关于解题的东西，譬如我们如何去想，和我们应该如何去想。

（1）在一个纵横字谜中，你找到如下线索：“一类很普通的心（十个字母）”。一开头，你可能对这个字是什么或这条线索意味着什么毫无头绪。但是当你顺利地找到一个交叉的字时，它给了你一个信息：即中间一个字母。另一个交叉的字又向你提供了第二个字母；接着又找到了第三个字母，或者第四个字母——于是突然，那个要求的字就会“闯进你的大脑。”

请准备好一张纸，翻到P.172这个问题的解答上。先用纸把整个解都遮住。然后向下移动你的纸，只露出第一行——你现在知道要求的字了吗？如果还不知道，再露出第二行，然后又是下一行等等；这样你就可以体验到什么叫做想法“闯进了你的大脑”。

*（2）如果你懂得一点微积分（不用太多），你可以在求一个不定积分的值时再体验一下。请取一张纸翻到P.172。

第十一章　思维的作用

马略特*说人类的大脑象一个口袋：你思考时就象在摇这个口袋，直到从里面倒出某些东西为止。因此思考的结果无疑在某种程度上依赖于机会。我想再补充一点，即人类的大脑更象一个筛子：你思考时就象在晃这个筛子，直到某些细微的东西筛落为止，而当它们筛落时，正在搜索的注意力就抓住一切似乎有关的东西。另外，它还有点象如下的譬喻：为了捉一个小偷，城市长官下令全体居民都去通过一道门，并让被偷的人站在门口监视。为了节省时间和少点麻烦，可以采用排他法，即如果被偷的人说小偷是男的，不是女的，是成人，不是年青人或小孩，那么，那些不相干的人就可以不必通过这道门。

莱卜尼兹：《短文与未完成稿》
p.170

* 马略特（Edme Mariotte，1620－1684）法国物理学家。

§11.1 我们怎样思考

解题者必须了解他的思路，运动员必须了解他的体质，就象骑师必须了解他的马一样。我想骑师研究他的马并不是为了纯科学的目的，而是为了使它们的成绩能更好一些，所以比之一般地去研究马的生理学和心理学，他更多关心的是自己马的习惯和脾性。

你现在正开始读着的并不是心理学教科书的一章，也不完全是解题者关于他们思维习惯的一次谈话，如同骑师们谈论他们马的习惯那样。不过，它倒更象一次谈话而不是正式的论述。

§11.2 有了一个问题

问题的一个基本要素就是要求、愿望和解它的决心。一个你已经很好了解了的并应该去做的问题还不能说就是你的问题。只有当你愿意去解它，下决心要去做它，它才真正变成了你的问题，你也才真正有了一个问题。

你卷进问题里的深浅程度将取决于你解它的愿望的殷切程度，除非你有十分强烈的愿望，否则要解出一个真正的难题可能性是很小的。

求解问题的愿望是一种生产的愿望；它可以最终产生出解，它当然也会在你的思维活动中产生一种变化。

§11.3 相关性

你也许会碰到一个很厉害的问题，它完全左右了你，到处跟着你使你无法摆脱。

做着问题的人也许会被问题缠住。他看上去心不在焉，在旁人看来是显然的事他却注意不到，旁人不会忘记的事他却忘掉了。牛顿在紧张解题的时候就经常忘了吃饭。

所以说解题者的注意力是有选择性的：它排斥考虑跟问题不相干的事，但只要与题目相关，那怕是最细微的关系它也能发现，这就是莱卜尼兹所说的那种"搜索的"注意力。

§11.4 接近度

一个学生参加数学笔试，不要求他做所有的题，但是他应当尽可能地多做。在这种情况下他最好的策略也许是一开始就用适当的速度把所有的题都过一遍，并把那些似乎有把握的题挑出来。

注意，这里假定了解题者能够在某种程度上估计问题的难度，他能估计到他和解之间的那种"心理上的距离"有多远。事实上，任何认真考虑过他的问题的人对于解的接近程度和问题进展的步子都会有一种明确的感觉。他或许没有用言词去表达，但是他会敏感到比如："这样做是对的，解可能就在这附近，"或者"这样太慢了，解还是离得很远，"或者"我卡住了，一点没有进展，"或者"我正在偏离问题的解"等等。

§11.5 预见

一旦我们认真考虑问题，我们就试图去预测，去猜想；我们憧憬着，预测着解的大致轮廓。这个轮廓或许多少是明确的——当然，也可能多少有点错，不过，我想说通常错得并不会太厉害。

所有的解题者都要猜，但同样是猜，肤浅的猜与深思熟虑的猜却有所不同。

一个缺乏经验的生手往往只是对着问题坐在那儿，搔着头，咬着笔，干等着一个巧妙想法的出现，他并没有为这个想法的到来做点什么或做得很少。而当所期待的想法终于出现并带来一个似是而非的猜测时，他又不加任何鉴别（或很少作仔细的鉴别）地一古脑接受下来，以为这就是解。

稍微老练一点的解题者对猜测则持审慎的态度。他的第一个猜测也许是“是25！”或“我应该告诉他这个和那个，”而经过检查以后，他可能又改了：“不，不是25，试一下30吧”或“不，告诉他那个没用，他可能回答这样那样，不过我可以告诉他…。”最后，就是用这种“试算与改进误差”的方法或者说逐次逼近法，解题者可能会得到正确的答案，或一个切实可行的计划①。

一个更为老练、富有经验的解题者，在他不能顺利地猜出整个答案时，他就尝试去猜答案的某些部分，解的某些特征，解的某些途径或一条途径的某些特点等等。然后他就设法发展他的猜测，同时还找机会检验他的猜测，并及时修改他的猜测使之能适应当时了解到的情况。

当然，不管是缺乏经验的生手还是深思熟虑的老手，都很希望能有一个真正好的猜测，一个巧妙的想法。

每个人都很想知道他的猜测什么时候才会成为现实。这种机会一般都很难精确估计（现在不是我们去谈论离题较远的估计的可能性的时候）。但是很多时候解题者对自己猜测

---

①参看§2.2（1）和§2.2（5）。

的前景是会有一个明确感觉的。某些甚至不懂得证明是什么的生手对自己的猜测也可能会有最强烈的感觉，那些经验丰富的老手则也许能辨出这种感觉的细微差别。不管怎么说，任何人对自己猜测前途的吉凶都是会有感觉的。所以除了相关性、接近度这种感觉之外，这里我们又看到了解题者头脑里的另一类感觉。

这是有关的一点吗？解还离得有多远？这个猜测好到什么程度？这些问题随着解题者每走一步都在提出来，但它们更多的只是感觉而未用言词表达，它们的回答也更多的只是感觉而并未表以言词。这种感觉是指导着解题者的行动呢还是只不过是他的判断的衍生物？它们是内在的原因呢还是表面的朕兆？我不知道，不过起码我晓得如果你没有这种感觉，那你就还没有真正深入你的问题。

§11.6 探索范围

我很少丢失手表，而每回遇到这种时候，为了找到它，总要有一番麻烦。当我丢了表时，开始我总是习惯地在一定的地方去找它：在我的书桌上，或是在我通常放这类小东西的某个搁板上，或者在任何我碰巧能想起来曾把手表脱下放在那儿的第三个地方。

其实这类动作是典型的。一旦我们认真考虑了我们的问题，我们就设想了它的解的一个轮廓。这个轮廓可能是模糊的，有时就连自己都难以意识到，但是它却会出现在我们的行动中。我们可以去试各种各样的解法，但它们都差不多，它们都在我们预想的（但也许是不自觉地预想的）那个轮廓之内。如果所试的解法没有一个是适合这个问题的，我们就

会感到若有所失，脑子里好象再没有什么东西了，因为我们不可能跑到那个预想的轮廓外面去。我们并不是去找任何类型的解，而只是找限定在轮廓之内的某一类型的解。我们不是到处去找解，而只是在某个限定的探索范围之内去找它①。

在一个适当限制的范围内去开始我们的探索是合乎情理的。当我去找表时，我自然不会到宇宙里去找，或到城里去找，或是在家里到处都去找，而只会到我的桌子上去找，因为过去我就曾不止一次在这里找到过它。所以说，在一个有限的范围内去找你的未知量是合乎情理的，但是当你越来越清楚意识到它不在那儿时却还要固执地在那儿找，那就没有什么道理了。

§11.7 决断

解题也许是一个思索的过程（对缺乏经验的生手来说则可能是条理不清晰的思索），也许这是一条通向解的漫长、艰辛、充满曲折的道路，每次转折都标志着一次决断，这种决断是我们对相关性和接近度的感觉、对前景增大的或衰退的期望所促成（或伴随着）的。不管是决断还是即兴的感觉都很难用言词表达，不过有时也可能这样表示出来：

"好，现在来看看这个吧。"

"不，这儿没什么可看的，我还是去看看那个吧。"

"啊，这儿也没太多可看的，不过总象是有点什么，让我再稍微看看。"

① Karl Duncker《关于解题》，心理学杂志，Vol.58，No.5（1945），p.75。

一类重要的决断是扩大我们的探索范围，放弃原来的限制，因为这种限制的狭窄性开始给了我们一种压抑的感觉。

§11.8 动员与组织

我们对解题者思维活动的了解是很肤浅的，它的复杂性可能是不好想象的。不过这种活动的一个结果却是十分明显的：随着解题者的前进，他收集的有关材料也就越来越多。

让我们把解题者在工作开始时和结束时对一个数学问题的构思拿来比较一下。当问题刚提出时，我们有一幅简单的画面：解题者看到的问题是一个未经剖析的没有细节或只有很少细节的整体，譬如说，他可能只看到问题的主要部分——未知量、已知量和条件，或假设或结论。但是最后的画面就很不同了：它是复杂的，充满了添加上来的细节和材料，它们之间的联系是解题者最初很难想到的。在原来几乎是空旷的几何图形上，现在有了辅助线，有了辅助未知量，从解题者以往获得的知识中找来了一些材料，特别是那些能应用到这个问题上的定理。这些定理现在将发挥作用，这是解题者最初所不曾预见到的。

这些材料、辅助因素、定理等是从哪儿来的？是解题者收罗来的，他要从记忆中把它们提取出来，并且有意识地把它们与问题联系起来。我们把这种收集称为动员，而把这种联系称为组织①。

解一道题就象建造一所房子，我们必须选择合适的材料。但光是收集材料也还不够，一堆石头毕竟还不是房子。

① 参见习题2.74。

要构筑房子或构造解，我们还必须把收集到的各个部分组织在一起使它们成为一个有意义的整体。

动员和组织实际上是分不开的，它们在解题这一复杂过程中相辅相成。解题这种工作在紧张的时候要求我们投入全部的精力，全神贯注，整个过程呈现出丰富多采的景象。下面我们将试图对涉及到的多种多样的思维活动加以区分，分别用下列这些词去描述它们——分离与组合，辨认与回忆，重新配置与充实。

以下各节就是企图对这些思维活动进行一些描述。当然，读者不应当指望也没有理由指望我们会得到一些严格的区分或是一些严密彻底的定义。

§11.9 辨认与回忆

当我们在考查问题过程中认出某些熟悉的图形时，我们会显得特别高兴。譬如在考查一个几何图形时我们可能高兴地认出某个先前没有注意到的三角形，或是一对相似三角形，或是某些别的熟悉的图形。在考查一个代数公式时，我们也许会认出一个完全平方式或是某些其他熟悉的代数组合。当然，我们还可能认出（这种辨认可能非常有用）某些更复杂的情况，我们找不出合适的名字称呼它们，甚至给不出它们的正式定义，但这些东西因为它们的熟悉和重要而给人留下印象。

当我们在图形里认出一个三角形时我们当然有理由高兴，因为我们熟悉关于三角形的几个定理而且也解过有关三角形的各种问题，这些已知的定理或以前解过的问题可能就有一个或别个是可以用到现在这个问题上的。通过认出一个

三角形我们便使问题与以往获得的大量知识有了接触，这些知识的某些部分现在或许就能用上。因此，一般说来，辨认能引导我们回忆起某些有用的东西，把有关的知识动员出来。

§11.10 充实与重新配置

我们在图形中已认出了一个三角形而且也成功地回忆起可能应用到目前这种情形的一条有关三角形的定理。不过，要想把这条定理实际用上，还必须在我们的三角形上引某些辅助线，譬如说一条高线。因此一般来说，这些动员起来的可望有用的因素，可以添加到问题的构思中来，使问题更加丰富充实，填补了它的空白与不足，一句话，就是充实了它。

充实可以使新材料进入我们问题的构思，这对整个问题的组织来说也是重要的一步。但是有时尽管没有引进什么新材料，只是把现有的因素重新配置一下，在新的关系下去考虑它们，我们也同样会在问题的组织中获得进展。通过重新配置问题的各个因素，我们改变了问题构思的"结构"。所以说这种重新配置就意味着重建①。

让我们把这一问题讲得更具体些。在一个几何问题的解法里，引进一条合适的辅助线可能是关键的一步，但有时我们不引进任何新的线段，只是按新观点去考虑现有的线段也能得到关键的一步。例如我们也许会注意到某些线段组成了一对相似三角形。看到这一熟悉的结构，我们就会认出在这

① 见前面引的Duncker的文献pp.29—30。

个图形的某些因素之间迄今尚未注意到的一个关系，我们看到了不同地组合起来的因素，从而发现一个新的结构，看到图形变成了一个比原来安排得更好、更协调、更有希望的整体——这就是所谓问题的重建。

重新配置可能会涉及着重点的改变。原来呈现在前台的那些因素和关系经过重新配置后，可能得放弃它们的特殊地位而退隐到后面去，甚至有的要从问题的构思里完全消失。为了更好地把问题组织起来，我们常常得放弃某些当初认为是有关的东西。不过整个说来，当然还是加进来的东西比丢掉的要多。

§11.11 分离与组合

当我们去考查一个复杂的问题时，我们的注意力可能时而被这个细节吸引，时而又被另一个细节吸引。我们集中注意某一个细节，把焦点放在它上面，去着重考虑它，把它特别挑出来，即把它从周围的事物里区分出来，一句话，我们把它分离出来了。以后我们的注意力又转到另一个细节上，又把另一个细节分离出来，就这样继续下去。

在考查完了各种细节并对它们中的某些重新予以评价之后，我们就会感到有必要重新把这些情况联成一个整体去看。事实上，在重新评价某些细节之后，整体的面貌可能会起变化。这些重新评价过的细节再结合起来，其结果便会出现一个所有细节显得更加和谐的组合体，一幅崭新的整体的画面。

分离与组合就是这样相辅相成地推动着解的进程。分离把整体分成若干个细部，随之而来的组合则把这些细部重新

集合为一个多少有些不同的整体。分解，重新结合，再分解，再重新结合，我们对问题的了解可能就是这样朝着一个更有希望的前景演化着。

§11.12 一张图表

图11.1是前几节的一个图解总结，读者可以从中摘其所要。在这里九个词排成了一个正方形，一个在正方形的中心，四个在正方形的顶点上，其余四个则写在四条边上。

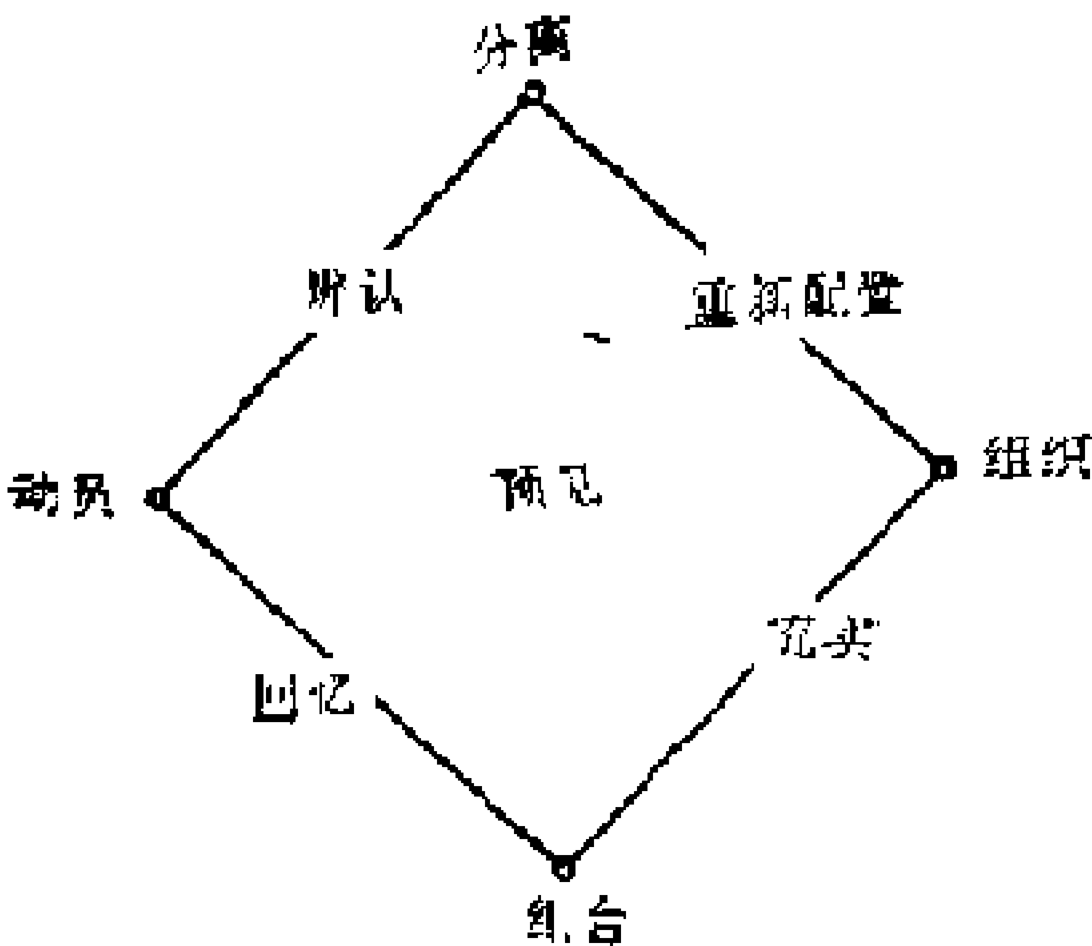


图11.1 我们是怎样思考的

动员和组织用正方形水平对角线的两个端点表示。事实上这是两个相辅相成的活动。动员是从我们的记忆中把有关的条款抽出来，而组织则把这些条款有目的地联系起来。

分离与组合用铅直对角线的两个端点表示。事实上这也是两个相辅相成的活动。分离是从整体里把特殊的细节挑出

来，组合则是把零散的细节重新集合成一个有意义的整体。

构成动员这个角的两条边标以辨认和回忆。事实上，与问题有关的条款的动员往往是从辨认出某个已给的因素开始并且有赖于回忆起一些有关联的因素。

构成组织这个角的两条边标以充实和重新配置。事实上，组织意味着充实这个问题的构思，依靠添加一些新的细节和填平空白，使它变得更完满，同时也意味着重新调整问题的整个构思。

当我们沿着正方形的边从左到右读这些词时，我们就从动员起来的细节达到了组织起来的整体。一个刚刚辨认清楚的细节，经过仔细分离和集中处理，可能会导致整个构思的重新配置。同样把一个回忆起来的适合某一组合的细节恰当地加进我们的构思，必将充实整个整体。

预见是我们解题活动的中心，所以它对应的点位于正方形的中心。所有我们的这些活动，动员和组织各种各样的因素，分离和重新组合它们，辨认和回忆它们，重新配置和充实我们对这个问题的构思等等，这一切都是为了想预测到解，或解的某些特征，或某一条通向它的小路。如果这种预见突然闪现在我们面前，我们就把它称为有启发的想法或灵感，我们整个活动的中心愿望就是想要得到这样一个想法。

当我们把图11.1概括的思维活动应用到特殊的对象上时，它会采取特殊的形式。例如，对应于正方形的四条边，我们可以列出在解数学问题中特别重要的四种思维活动：

辨认：	重新配置：
利用定义	改变问题的形式

回忆：　　　　　　充实：
已知的定理和问题　引进辅助因素

另外还有一点，解题者的活动总是伴随着相关性和接近度的感觉并受其促进，它同时也受到在估量他的猜测的长处时所引起的感觉的影响。讲到这些，我们附带提一句：比较老练的人在这几点上都具有更强的辨别感。此外我还想作一个带点推测的注解①：某些这种感觉可能跟图11.1中提到的那些思维活动有联系。

如果我们问题的构思已变得很匀称，很有条理，所有的细节都已齐全，而且都是熟悉的，这时我们就可以满意了。如果在你的和谐的整体里有清晰明瞭的细节，那么解的想法一定就在眼前了！照我看来，以上用这些词所表达的意思就是我们前面提到的那些活动进行得很顺利或者说已经达到了它们的目的。

当我们感到不再需要重新配置时，就说明我们对问题的构思看上去已经匀称了，而当我们容易地就能把全部细节都回忆起来时（任何一个细节都可以很容易地勾起其他的细节），这表示我们的构思看上去是有条理的了。当不再需要什么补充时，我们的构思看上去就是完全的了，如果所有的细节都已辨认出来，那就表示它看上去已是熟悉的了。细节的清晰来自前面的分离与集中处理，而整个构思的和谐则是成功地组合了所有细节的结果。我们之所以说想法就在我们的眼前，是因为我们感到事情在顺利地朝着更充实的预见前进。

---

① 参看HSI，进展的标志1，p.184。

下面我想把以上讲的这些表明工作进展的标志，系统地归纳成一张表，它们相互的位置与图11.1正方形中那些对应词的安排相同。这里我们一共排到了七个词，其中四个是正方形四条边上的词，另外三个在它的铅直对角线上。请看这张表：

成功地分离：
清晰的细节

充分地辨认：　　　　　　　　成功地重新配置：
熟悉的　　　　　　　　　　　匀称的

有希望的预见：
想法即在眼前

充分地回忆：　　　　　　　　成功地充实：
有条理的　　　　　　　　　　完全的

成功地组合：
和谐的整体

§11.13 部分启示着整体

有一次在街上，我从一个吹着口哨走过身边的男孩那里听到了某支曲子的一两个旋律。这是一支我很喜欢的曲子，但已经多时没有听到了，因此在刚听到的一刹间，满脑子全都充满了这支曲子的旋律，其他一切忧患喜乐都被赶到了九霄云外。

这件小事是“联想”的一个很好的说明。大脑的这一现象早就被亚里士多德和以后的很多作者描述过。布莱德雷*

* 布莱德雷（Francis Herbert Bradley 1846—1924）英国哲学家。

说得很好："脑子里单一状态的任何部分，如果重现的话，就会使其余部分趋于恢复。"我碰到的情况就是这样，一个旋律带回了整支曲子的回忆，随之不久其余的旋律也都在脑中重现了。下面是对此现象的另一种虽然不够细致但容易记住的说法："部分启示着整体。"我们可以把这种说法看成是布莱德雷较为准确的阐述的一句方便的缩写。

请注意两个重要的词"趋于"与"启示"。下面这些话

"部分启示着整体。"

"部分能使整体趋于恢复。"

"部分有机会去恢复整体。"

都是可取的，但是

"部分恢复了整体。"

作为"联想法则"的一种表达方式则是不可取的，因为不是必然会恢复，而只是说有一个机会、有一种趋势。关于这种趋势的强烈程度，我们还知道如下规律：如果你对那一部分集中了更多的注意力，那么它就将更强烈地启示着整体；而若干个部分连在一起，将比它们中任何单个更强烈地启示着整体。假若你想要了解联想在解题者思维的经历里扮演的角色，那么刚才加上的这两句话是很重要的。

让我们考虑一个大略的例子。假定有一个数学问题，如果用了某个关键性的定理D就可以很快解出来，而不用D就会十分困难。解题者虽然对定理D本身理解得很好，但开始时他根本没想到定理D会跟他的问题有关，那么他怎样才会注意到定理D的关键作用呢？这时可能发生各种情形。

一种比较简单的情形是所提问题与定理D有一个部分是共同的。解题者在试过这又试过那之后，可能会注意到这个

共同部分，把它分离出来并集中处理它，于是这个共同的部分就得到一个机会，使它能把整个定理D恢复起来。

另一种不那么简单的情形是原来问题的构思与定理D没有公共部分，但是如果解题者还知道一个定理C，它有一部分与问题有关而另一部分则与定理D是共同的，这样解题者就可能会先接触到C而后又由C达到了D。

当然，这条联想的链条可能会更长。例如，从所提问题联想到A，由A联想到B，由B及C，最后才由C到达D。链条越长，则解题者"摇口袋"、"筛筛子"的时间也就越长，直到最后把定理D摇出或筛落为止。

摇口袋或筛筛子只是用来描述解题者思维经历的一种隐喻（见本章开头的引语），用图11.1加以总结的前面那几节就是试图少用些隐喻去描述这一思维经历。而在这里我们又给了前面描写过的那些活动（辨认、回忆、……）一个合理的解释——解题者正是通过那些活动去寻求建立我们指望的联想。

事实上，通过认出某个因素，解题者就把它置于可以找到联想的范围之内。而任何新动员出来的因素添加到问题构思里来，都使我们有更多机会去引出更多联想中的因素。当解题者分离出某一因素并集中处理它时，花在它上面的精力就使它有更多机会去跟别的因素建立联想。而一次重新配置则可以使若干因素彼此接近，多个因素共同实现的联想当然比任何单个因素实现的联想要多。

然而仅仅用联想去解释解题者的思维经历是不够的，除了联想这一互相吸引的作用外，必然还有某些别的东西使我

们在那些联系着的因素与组合中去区分出到底哪些是相关的哪些是无关的，哪些是有指望的，哪些是无指望的，哪些是有用的，哪些是无用的[1]。

---

① 见前面引的Duncker的文献p.18。

第十一章的习题与评注

11.1 你的经验，你的判断。本书的目的是为了改进你的工作习惯。实际上只有靠你自己才能改进你的习惯。你应该去发现在“你通常在做些什么”和“应该去做些什么”之间的差别。这一章就是写来帮助你更好地看清自己通常在做什么。

下面这些练习，习题11.2 11.6要求你说明前面正文里那些节的内容，试用你自己的工作把解释找出来——这些自发地在你脑子里产生的解释是最能说明问题的。试着不带任何偏见地判断一下正文的描述或图11.1关于解法的说明是否与你的经验一致。

11.2 动员。 回忆你做过的某些几何题，原来的图形上几乎是空的，而在解题过程中随着辅助因素的引入，图形就愈来愈充实了。

11.3 预见。 你能想起这样一种情况吗？——在某个非常确定的时刻，你突然变得坚信解法一定会成功。

11.4 更多的部分能更强烈地启示整体。 你同意这个意见吗？试用你自己的经验加以说明。

11.5 辨认。 你是否能回忆起这样一种情况：认出一个因素（或者注意到了它以前没被注意到的作用）成了解法的转折点？

11.6 重新配置。 你是否能回忆起这样一种情况：重新配置一个图形成了解法的关键？

11.7 从里面做起和从外面做起。 在所提问题和他已有的经验之间建立接触，这无疑是解题者行动的一个基本部分。他可以试着“从里面”或“从外面”去发现这种接触。他可以就在问题内部考查它的各个因素，直到他找到了某个因素，它能从外面、从以前获得的知识中吸收进来某个有用的因素为止。另外，他也可以走到问题外面去，考查他早先获得的知识，直到他找到某个可以应用到该问题上的因素为止。从里面去做就是解题者仔细审视他的问题，研究它的各个成分和各个方面。从外面去做就是他浏览自己已掌握的知识并在其中搜寻，看是否有什么似乎能用到现在这个问题上来。图11.2的两个部分就是试图给出“从里面”和“从外面”工作的具体形象表示。

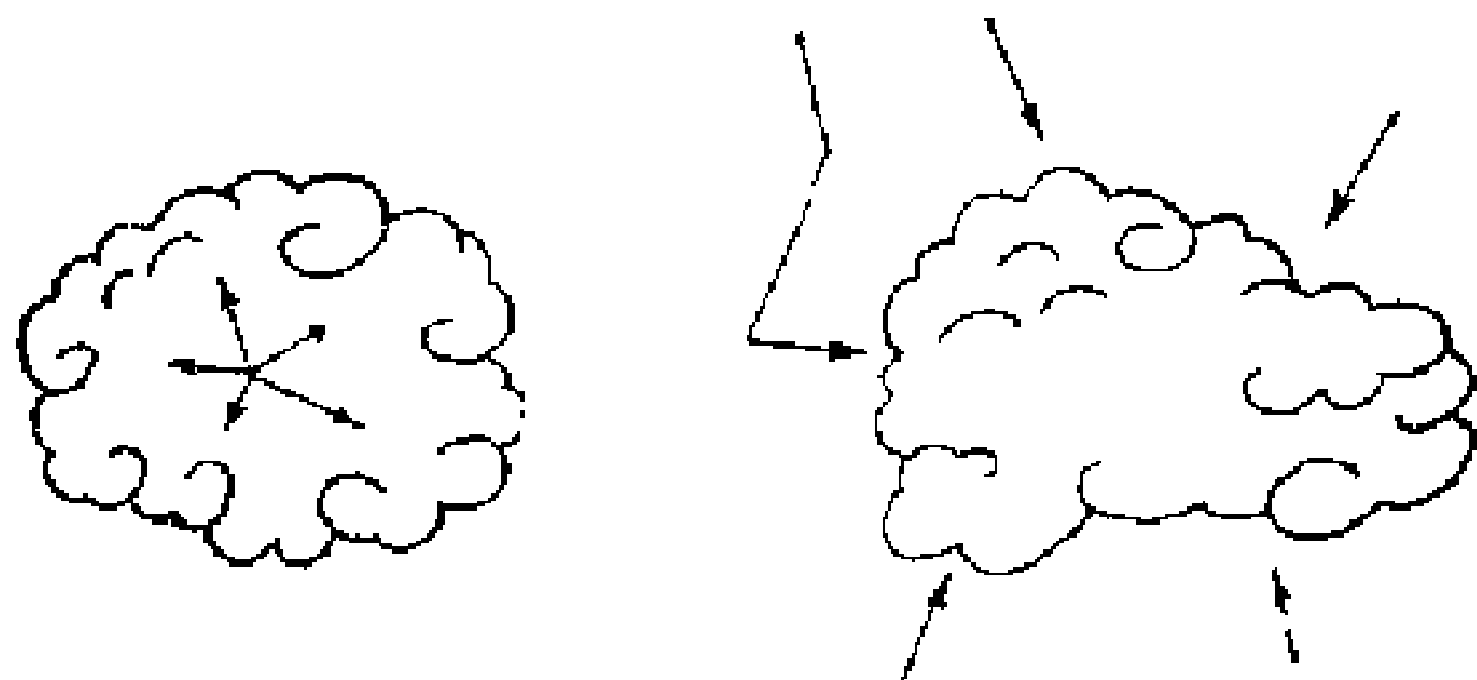


图11.2 从里面做起和从外面做起——穿破云层。

11.8 老鼠迷宫的启发。 图11.3可以表示林木茂盛的丘陵地带伐木者草草修成而又很快弃置不用的小路，点E表

示入口。图11.3也可以表示心理学试验里让老鼠在里面奔跑的迷宫。



图11.3 小路，小路，死胡同和侧门。

但是图11.3也可以用来象征解题者用某种方法工作时的活动。开始他往前走了一段路以后，就沿着一条弯曲小路走去，一直走进一条（实际的或想象的）死胡同为止，然后他转过头来折回原路，当他看到旁边有一条小路时，他就又沿着它走下去，来到另一条死胡同，于是又折回来，他就是这样走着，试了好几条路，多次折回去，不断留心新的出路，就这样探索着他的问题，从整体上看还是在走着（我们希望）正确的方向。

11.9 进程。随着解题过程的推进，解题者对问题的构思不断改变，这特别表现在他收集到的与问题有关的材料越来越多。我们姑且假定我们能用某种办法去测得在每瞬间收集到的材料的“程度”，并假定这一“程度”在某种程度上反映着解题者对问题的构思。当然，这一假定是粗糙的靠不住的，不过它使我们可以用图形去表示解题的进程。

在一个坐标系中，见图11.4，我们把时间取作横坐标而

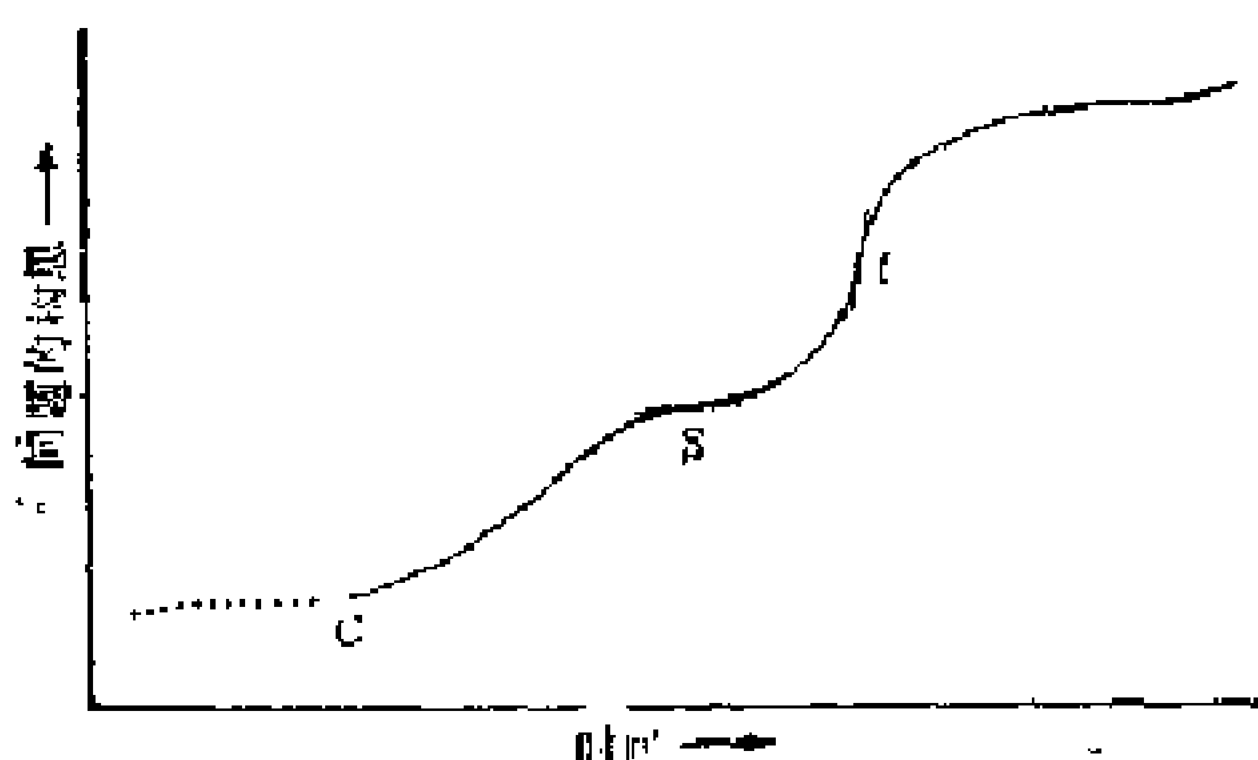


图11.4 自觉的开始——停滞——想法，灵感，转折点。

把某一时刻我们对问题构思的“程度”取作对应的纵坐标。所得的曲线表示我们对问题的构思是时间的函数，这条几何曲线表示出解法在解题者脑子里是怎样成熟起来的。

我们假定这个解法在发展中没有受到什么挫折，所以对应的图11.4是一条上升的曲线，代表一个时间的非降函数。曲线从一段缓慢的稳步上升的虚线开始（左边），这是想表示“史前”时期即问题下意识生长的阶段。点C标志着自觉工作的开始，从这里曲线变成了实线。斜率表示在那一瞬时工作进展的速度，这个速度在变化着，它在S点最慢，曲线在S点切线是水平的，它表示着瞬间的停滞。在点I速度最快，那里的斜率取到了极大值，同时I还是一个扭转点，它意味着关键想法在这里出现了，这是灵感来临的那一瞬间。（点S也是一个扭转点，但它属于相反的类型，在S点斜率是取极小值的。）

解法在解题者脑子里的发展是一个复杂的过程，其变化

是各种各样的。图11.4并没有把这些情景都表现出来，但它可以给我们其他的讨论（譬如说图7.8）作点补充。

11.10 你也是这样的。很多我知道（或者我想我知道）的解题知识是通过对少数几个难忘的经历的深思而得到的。常常在读一本书，或跟一个朋友进行讨论，或跟一个学生闲谈，或观察听众的脸色时，我会突然想起什么来，而且情不自禁地对自己说："你也是一样的，你做这些时也跟他们一样。"实际上，甚至我观察动物时——狗呀，鸟呀，有一次是老鼠——也有过这种感觉"你呀，跟它们是一样的。"

11.11 鼠与人。女东家慌慌张张地跑到后院，把捕鼠器放在地上（这是一个老式的捕鼠器，即一个有一扇活门的笼子），并且催她的女儿赶快把猫弄来。捕鼠器里的老鼠看来象是知道要发生什么啦，疯狂地在笼子里蹦着，死劲地朝栅栏上撞着，一会儿朝这边，一会儿朝那边，在最后一刹那它终于成功地挤了出去，消失在邻居的地里。捕鼠器某一边的栅栏中间肯定有一个缝隙比较宽。女东家显然很扫兴，那只来晚了的猫也很失望。可我从开始就是同情老鼠的，所以我感到很难对女东家或猫说点什么安慰的话，而是暗地为老鼠庆幸。它解决了一个很大的问题，给出了一个重要的例子。

这也就是解题的途径。我们必须一再地去试，直到最后我们看出各种缝隙之间的细微差别为止。我们必须多次变更我们的试验，使得我们能探测到问题的各个方面。因为说实话，我们事先并不知道唯一能让我们挤过去的那道缝隙到底在哪一边。

鼠类和人类所用的基本方法是一样的：一再地去试，多次变化方法，使我们不致错过那少许的宝贵的可能性。当然

罗，人解决问题通常总比老鼠要强，人不需要用肉体去撞障碍物，他是用智力去撞，人能够比老鼠更多地变化他的方法而且也能从挫折里学到更多的东西。

第十二章　思维的守则

> 所谓方法就是把我们应该注意的事物进行适当的整理和排列。
>
> 《笛卡儿全集》，第十卷，p.379；
> 思维的法则，法则V。

§12.1　应该怎样思考

第十一章试图描绘出解题者典型的思维活动。但是典型的是否就是合理的呢？我们可以这样去做，但是，我们是不是应该这样去做呢？

这些问题既含糊又笼统，很难于回答，不过却可以用来表示本章的意向。我们将试着利用第十一章所概括的解题者的思维经历来把那些对于解题者有典型意义的思维活动（步骤、程序等等）列举出来，并且在列出的过程中指出每一个在解题过程中所处的地位。

我们将以简洁的形式，利用一套“定型的”提问和建议来表达这些对解题具有典型意义的活动。读者将会感到这些问题和建议可以用两种不同的方式去解释：它们或者是引自解题者的自言自语，或是一个高明的教师向他要培养的一个

学生所提的建议①。

§12.2 集中目标

当你有了一个问题，这个问题也许会经常在你的脑中出现，把你缠住不放。不过，你不要只是笼统地去想你的问题，而应该是面对它，看清它，特别是应该问自己：*你要求的是什么？*

在解题的过程中，会碰到多次问这个问题的机会。当你深深地陷进了某个也许不相干的枝节问题中时，当你的思路开始混乱时，那么最好是问一下自己：*你要求的是什么？*并把思路重新集中到目标上来。

求解的问题的目标是未知量；为了把思想集中到这种目标，你应该问：*未知量是什么？*求证的问题的目标是结论，这时相应的问题是：*结论是什么？*

看清楚你的目标，也就是看清你想要取得的东西之后，你应当清点一下自己现有的可以用来达到目的的东西，所以应当问一下自己：*你有些什么？*

实际上，如果你希望把两个点联系起来，找到一条由此及彼的途径，那么你最好是轮流地观察这两个点，先是这一个，再是那一个，因为这样你就经常有机会来回地问：*你要求的是什么？你有些什么？*

对于求解的问题，我们问：*未知量是什么？已知量是什么？条件是什么？*？而对于求证的问题则应当问：*结论是什*

① 建议读者将这一章的说明与HSI中平行的章节进行比较，前面这一段可参考pp.1－5，目的。"定型的"提问和建议（它们是我的方法的一个主要部分）在我的文章中有介绍，见参考文献〔16〕。

么？假设是什么？

这些问题提醒了我们什么呢？它提醒我们把注意力集中到上述各点上。按照笛卡儿的说法（见本章开头的引文），方法就在于按适当的顺序一个接一个地去注意全部有关联的各点。当然，求解的问题的那些主要部分（未知量，已知量和条件）和求证问题的主要部分（结论和假设）无疑都是有关联的。它们简直太重要了，看来应当及早考虑它们；当你把问题作为一个整体充分了解之后，就应把注意力集中到它的主要部分上去。

§12.3 估计前景

一个认真对待自己问题的解题者，对自己走向目标的步伐和目标接近的程度，以及任何影响自己计划前景的变化都会有敏锐的感觉。而我们常常还希望能比感觉更进一步，例如清醒地估计一下自己的处境，判断一下问题的性质，估计一下问题的前景等等。这些就是下面我们要提的那些问题的意图所在。

有些问题是没有希望的。如果我们手头的问题是一个没有希望的问题，我们当然就不应该在里面陷得太深，因此，我们要问一问：这问题有什么答案吗？它有一个清楚的答案吗？如果有答案，我能求出来吗？

当我们在处理一个求解的问题时，我们应当问一问：这问题有解吗？我们还可以进一步细问：这个问题是只有一个解呢？还是有几个解？或者是没有解？问题的条件是不是恰好足以确定未知量？或它要求得太少了还是太多了？

当我们在处理一个求证的问题时，相应的问题是：这个

定理成立还是不成立？我们还可以进一步细问：这定理是成立的呢还是得有更强的假设才能保证它成立？这个定理是不能改进了呢还是一个较弱的假设就足以保证它成立？等等。

实际上，在结束我们的工作及解出问题之前，这些问题中的任一个都不可能得到明确的回答。但是我们并没有真正指望能明确回答这些问题，我们所要的只是一个临时性的答案，即一个猜测。在寻求正确猜测的过程中，我们可以逐步弄清在这个问题上自己的地位，而我们所期望的效果也正是这个。我们已把前面的问题用一种简短而通俗的形式叙述出来了。为慎重起见，我们应当问一下：这问题象是有答案、有解的吗？所述定理可能成立也可能不成立，哪一种可能性更大些呢？

我们该在什么时候问上述这些问题呢？这并没有（也不该有）什么一定之规，十分经常的是，考虑过§12.2对问题的主要部分提出的那些提问之后，它们就会很自然地随之提出来了。

§12.4 所要求的：途径

目标启示着手段，对目标（未知量，结论）的考虑可能会启发你找到一个途径。考虑了目标，问题就一个接一个地出来了：你要求的是什么？什么是未知量？你怎样才能求出这种类型的未知量？根据哪些已知量你就能求出这一类未知量？这些提问就引导到一条“倒退”的途径：如果我们发觉了可以推出所提问题的未知量的“已知量”，那么我们就可以把这些“已知量”选作辅助问题的目标，这样我们就可以开始从后向前推了〔见习题8.1(2)〕。

对于求证的问题，相应地我们问：你要求的是什么？结论是什么？你怎样才能推出这种类型的结论？根据哪些假设条件就能推出这种类型的结论？

与上面强调未知量（结论）的提问相应的我们也可以有强调已知量（假设条件）的提问：已知量是什么？这样的已知量有什么用？从这种已知量你能推出些什么？对于求证的问题也有一串对应的提问：假设条件是什么？这样的假设条件有什么用？你能从这种假设条件推出些什么？这些提问将引导到一条前进的途径。（见习题8.1；我们在习题8.1中曾讨论过这个问题，应当记住，总的说来，倒着推的计划比前进的计划要略胜一筹。）

不幸我们经常碰到的情况是既不能用倒退着推的办法也不能用前进的办法去得出一个可行的计划。不过还有些别的提问可以启示我们去找出一条途径，下面这些提问及早地提出来也许是可取的：这是什么类型的问题？它与某个已知的问题有关吗？它象某个已知的问题吗？在试着把我们的问题归入某一类和试着找出它与已知问题的关系及相似之处的过程中，我们可能会发现一个熟悉的可以用于目前问题的模型，于是我们就有了一个出发点——这里我们已经看到了也许会引导我们得出解的道路的第一段。

为了找一个可用的相关问题，我们可以去综观一下那些最常用的关系：你知道一个相关的问题吗？你能设想出一个相关的问题吗？你知道或你能设想出一个同一类型的问题、一个类似的问题、一个更一般的问题、一个更特殊的问题吗？但是，这些提问也可能使我们远离了原题，所以通常总是在我们已经把问题弄清楚并记牢之后才把它们提出来。这

样，即使我们在距离原题较远的地方工作，也不致于有忘掉原题的危险。

§12.5 所要求的：更有希望的局面

当你处理某些具体事情（比方说，你打算从树上锯一根树枝）时，你会自动地置身于一个最便于行动的位置上。面对任何问题都应仿此办理，也就是你应当设法使自己处在一个最易于抓住问题的位置上。在解题过程中，你常常会翻来复去地在脑子里掂量着问题，试图能使它看起来更简单。此刻你看到的问题的情况可能还不是最好的。所以应当问一下自己：这个问题已经尽可能地简单，清楚，以及表达得有启发性了吗？你能重新表述一下这个问题吗？

你当然很想把问题重新表述一下（即把它变成一个等价的问题），使它变得更熟悉，更有吸引力，更易于接近和更有希望解决。

你工作的目的就是想在你要求的东西和你现有的东西之间横着的那条鸿沟上架起桥来，也就是要把未知量和已知量，结论和假设联结起来。那么你能不能把问题重新表述得使未知量和已知量，结论和假设看上去彼此更加接近呢？

你可以把结论变形，把假设变形，或者把两者同时变形，但必须使它们彼此更加靠近。同样的，你可以把未知量变形，把已知量或条件变形，或把整个问题变形，但目的应当是使得未知量和已知量彼此更加靠近。

随着问题的进展，一些新线段出现在所考虑的图上，而在解题者脑中逐渐成熟的结构上，也加进了新的材料和新的关系。问题的每一次变形都便于带来新的因素。而返回到定

义则是给问题构思增加新材料的重要途径。

例如，如果我们的问题是处理一个棱锥的棱台（见第七章），我们应当问一问：棱锥和棱台是什么？它是怎样定义的？棱台是被一个平行于底面的平面截去一个小棱锥后余下的部分。这个回答使我们注意到了两个新的立体——整棱锥和小棱锥，我们发现把它们中的某一个或同时两个都结合到问题的构思中来可能是很有利的。①

把问题所给的这些因素返回到定义去考虑，使我们可以引进某些新的因素，而这些新的因素转而又引出更多的新因素，如此继续下去，我们就可以把问题的思路进一步展开。这种展开往往能使我们更接近问题的解。但也不尽然，因为有时某些不必要的过细反而会阻碍问题的解决。

值得考虑的使问题变形的方法很多，有些方法仅对某些特殊类型的问题适用，但也有一些是比较一般的。（见习题12.1，12.2。）

§12.6 所要求的：有关的知识

所谓解法基本上就是把所提问题与我们过去获得的知识中的有关因素联系起来，当我们试图把问题复述成一种更有利的形式时，我们实际上是想从问题本身开始去寻求联系，即企图用“从里面”做起的办法去穿透包围问题的云层。我们也可以从另一个极端去寻求这种联系，即试着用“从外面”做起的办法去寻求某些有用的知识片断。

要想全盘考查我们已经获得的全部知识显然是不可能

①HSI，定义，pp.85——92。

的。因此，我们只能从考查最有可能与目前问题有联系的那部分知识入手。

如果你对问题所属的范畴是熟悉的，你就能知道其中哪些是“关键的事实”，也就是那些你最有机会用得上的事实。这样你就把它们事先准备起来，就象一个好的工人把得心应手的工具备好放在手边那样。

如果你有一个求解的问题，你就应该特别关心那些具有相同未知量的问题，因为这种问题可能会是一个倒推计划（见第八章）的起点。如果你有一个求证的问题，那么那些与所考虑的定理具有相同结论的定理值得你特别注意，因为它可能是一个出发点。

这里所谓的关键事实是什么？有一个具同样类型未知量的问题（特别是过去解过的问题）吗？有一个具同样结论的定理（特别是过去证过的定理）吗？这些提问能提醒你从过去获得的知识中抽出某些有用的因素，当你要去收集有关的事实时，则从这些问题入手是比较恰当的。而如果这些都无济于事，那么你就得去考查更复杂、更深奥的事实，或者某些过去考虑过的，虽然跟手头问题的未知量或结论没有共同点而在其他某个因素上却有共同点的问题。毫无疑问，在你的知识中总有一些是能用于现在这个问题的，但怎样把它们联系起来呢？又怎样去得到它们呢？你可以尝试“推广”，“特殊化”，“类比”；以及在你的问题所属的整个范畴内去搜寻。

当然，你的知识面越广，组织得越好，那么你找到所需要的东西的机会也就越多。见习题12.3。

§12.7 所要求的：重新估计形势

有时你对工作的进展会感到很失望，因为你有过的各式各样的想法都失败了，试过的那些路也都走进了死胡同。摆在你面前的图形，问题整个构思的现状显得麻烦而含混，拥挤但又不完全，一些基本因素、基本环节仍无下落。

麻烦可能是由于陷进了枝节问题，或受了毫不相干的材料的拖累所引起的。因此最好是回到问题最原始的构思上去，重新去考察未知量，已知量和条件，或者假设和结论。你把全部条件都考虑进去了吗？你把所有的已知量都用上了吗？你把全部假设都考虑进去了吗？它的每一部分你都用到了吗？

如果你原来就确信所有这些已知量和条件都是确定未知量所必不可少的，或者全部假设都是推出结论所必不可少的，那么这些提问就问得非常贴切。倘使你没有明确到这些，而只不过是觉得所有的已知量与条件或假设的所有分款可能是很根本的，则前面那些问题问得也是恰当的，而且可能会对你有所帮助。它们启示你应该试着去用某一个你完全忽视了的已知数据或者分款，而这样做就有可能使你找到失落的环节。

另外，麻烦也有可能是由于你还没有充分理解问题中的那些基本辞句的意义。你对问题直接涉及的所有概念都了解（形象化地了解）了吗？这个提问可以提醒你返回到某些辞句的定义上去，提醒你应该弄明白你的问题，这样就有可能导致你得到一个比较满意的复述或找到某些有用的新因素。

§12.8 提问题的艺术

在前面几节里，我们概述了解题者几种典型的思维状态或“步子”。每一个步子的描述都表示成为一个提问（或建议——本书用五号楷体排的），它可以作为步子的一个缩影，是这个步子的一个紧凑的表示①。重要的是要弄清楚解题者（或教师）怎样才能用这些提问。

这里所收集的每一个提问，如果问得是地方，是时候，就可能引出好的答案，引出正确的想法，或一个能推动解的进程的合宜的步子。所以说，提问的作用就象一服兴奋剂，它能促使我们产生所期待的反应。所以说，这些提问是思想的指南。

然而，当你真的身临其境时，你可能会不知道该问些什么了。这时你可以试着作几个提问，一个接着一个，直到提出一个有用的问题来。因此你可以把前面几节看成是选问题的一个库仓，即当作一张提问的清单。

但是不要随心所欲地用这张清单随便地提问，也不要机械地搬用它，按死板的顺序去提问。我们应该象一个熟练的工人使用他的工具箱那样来使用这张清单。一个熟练的工人总是先仔细地考查一下要做的活，然后再去选择他该用的工具。他可能在找到顺手的工具之前要试好几件工具，但他绝不是随意地或者机械地按固定的顺序去拿他的工具，他是运用他

①关于“求解的问题”所涉及的提问列表于HSI，pp.XVI—XVII，（紧接在精装本封面的背面）。建议读者去研究一下这张表及所附的说明和例子。

的判断力去选择工具的。这也就是当你在碰到一个题目时，应怎样从本章所收集的那些提问中去选取其中一个的途径。

当然，一个工人可能得经过长期的实践和仔细观察别人的工作才掌握他的手艺。这也正说明了你怎样才能把握这里所收集的这些提问的用法。这里并没有指导这些提问用法的一成不变的规则。但是如果这些提问的背后有着你个人成功或失败的经验，如果你对你的目标了解得十分透彻，那么你就很有可能会挑出一个好的提问来。

一个熟练工人的工具当然都是保管得很好而且很有条理地排列在工具箱里的。如果你不止是从字面上而是从你亲身经历里理解了本章描述的这些提问及由此而来的解题步子，如果你很好地了解了它们在解题过程中各自的作用，那么，我认为你将会比大多数人更善于去内行地，而不是笨拙地、随意地处理你的问题。

可能任何类型的思维守则都在于掌握和恰当地运用一系列合适的提问。但是，我们怎样才能学到提问的艺术呢？这种艺术没有任何规律吗？

第十二章的习题与评注

12.1 重新表达问题。我们问题的目标是要去证明（或否定）下述命题："如果A成立则B也成立"。有时把问题变形，去证明（或否定）等价的逆否命题："如果B不成立则A也不成立"可能更方便些。见习题9.10。

下面是一个类似的情况，令x表示一个求解的问题的未知量，a，b，c，…，l表示已知量。（例如未知量和已知量表示某一几何图形各部分的度量。）这时如果把未知量x与一个已知量，比如a，互换一下可能会带来好处。这样我们就把原来的问题变成一个新的问题，它的未知量是a，而已知量是x，b，c，…，l。见习题2.33，2.34，和2.35。

我们在这里考虑了两种与本题无关的变形的类型。这些类型的研究本来属于启发式的范畴。

12.2 把它表达成数学语言。我们在§2.1中讨论过的笛卡儿的伟大计划可以（粗略地）概括成这样一句话：你可以把任何问题，通过表成代数方程转化成数学问题。笛卡儿的计划是失败了，但我们可以把它推广为：把你的问题表达成数学语言从而使它获得新生。当然，这一建议能否成功就看我们能运用自如的数学语言的范围和水平了。譬如说，如果我们不仅了解并能运用笛卡儿的代数符号，而且还了解并能应用微积分的符号，那么我们能处理的问题就多得多。

从一种非常广泛的意义上讲，任何一种充分清晰的概念结构都可以包括在“数学语言”当中。在这种非常广泛的解释之下，“把它表达成数学语言”这句话理论上可能是完全的，但在实践上却并没有什么意义，因为它的意思一点也不比“试弄清它”多多少。

不过也有一种很窄的甚至多少有点含糊的解释但它却是经常有用的。这就是把图解，图表和几何图形当作一类数学语言的符号形式来用。画一个图，也就是把问题表成几何图形的语言，这常常是很有帮助的。有些人就有一种要把自己的想法表示成某种几何符号的欲望。参见习题14.8。

12.3 货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本。良好的组织使得所提供的知识易于用上，这甚至可能比知识的广泛更为重要。至少在有些情况下，知识太多可能反而成了累赘，它可能会妨碍解题者去看出一条简单的途径，而良好的组织则有利而无弊。

在一个秩序井然的仓库里，最常用的东西总是放在最容易拿到的地方，经常在一起使用的东西也总是放在一起，标签和细目则安排得便于我们把两个或更多个有关的东西同时取出来。

把图书馆里的图书或工具箱里的工具布置得很实用对工作是会大有帮助的，然而把你记忆里的知识安放得有条不紊则更对你有帮助，因此也更值得你去关心。让我们来看看某些（对解题者来说是重要的）组织要点：

(1)在任何主题中，都会有一些关键事实(关键问题，关键定理)，你应当设法把它们放在你的记忆库里的最前面。当你开始解题时，你跟前总得有一些关键的事实，就象一个

熟练的工人开始工作时总是把他最常用的工具放在旁边一样。

当你想用欧几里德的方法去证明一个初等平面几何的命题时，你可以把三角形合同的四种情形和三角形相似的四种情形看作是关键事实。当你想用笛卡儿的方法（第三章）去把一个几何问题化成方程时，你可以把毕达哥拉斯定理和相似三角形边成比例的定理看作是关键事实。如果你对处理级数的收敛或一些其他类的问题有经验，你也就能说出同样有关的关键事实。

（2）下列两个提问对解题者来说是经常要用的：*用什么样的已知量你才能确定这种类型的未知量？根据哪些已知条件你才能推出这个结论？*由于要不断地用这些提问，所以我们应当把过去解过的具有同样类型未知量的问题及过去证明过的具有相同结论的定理设法"贮存在一起"。

（3）你了解你所住的城市吗？倘若你很了解它，你就应该能找出城市中任意两点间最近的走法以及指出采用什么交通工具最为方便。同样，这也正是我们对知识的组织所要求的：在你工作的领域内你应当能找出任何两点间切实可行行联系。

概括一下有关的问题也许能使知识的组织搞得更好一些。为此，本书的第一部分曾广泛地概括了由于能用同一个模型解出而彼此关联着的问题。同样的，我们也可以去概括具有共同未知量的或共同已知量的或由类比关联着的等等一系列问题。

（4）欧几里德除《几何原本》外还写了一些其他的书，其中之一是《已知量》。这本书里概括了能够确定几何

对象的各种不同的已知量。我相信欧几里德写《已知量》的目的是想把几何知识以即时可用的形式存放起来，以此去帮助我们的解题者，而这种形式主要是为那些经常问自己“根据哪些已知量我就能确定这一类未知量？”的读者考虑的。

12.4 根据哪些已知量你才能确定这种类型的未知量？试列出若干简单的“求解问题”，其未知量分别描述在下列句子中（这里大写字母表示点。）

（1）……求点P。

（2）……求AB的长度。

（3）……求$\triangle ABC$的面积。

（4）……求四面体$ABCD$的体积。

12.5 根据哪些假设条件你才能推出这个结论？试列出若干个简单的平面几何定理其结论分别为（大写字母A，B，C，…表示点。）

（1）……则$AB=EF$。

（2）……则$\angle ABC=\angle EFG$。

（3）……则$AB:CD=EF:GH$。

（4）……则$AB<AC$。

12.6 类比：三角形和四面体。下面是一对问题，第一个是关于三角形的，第二个是关于四面体的，它们彼此类似：

作给定三角形的外接圆。

作给定四面体的外接球面。

列出更多的彼此类似的题对或定理对。它们的解法或证法也类似吗？或者说它们彼此是怎样关联着的？

12.7 叙述一个类比于下列四面体定理的三角形定理：

连结四面体相对两棱中点的直线必通过四面体的平行于

该两棱的任一截面的重心。

这个三角形的定理能有助于证明上面的四面体的定理吗？对习题12.8和习题12.9所叙述的定理，也请回答对应的提问。

12.8（续）任何通过四面体相对两棱中点的平面必平分其体积。

12.9（续）在任一四面体中，平分二面角的平面把所对的棱分成与包含这个二面角的两相邻面的面积成比例的线段。

12.10 注意和行动

（1）方法是不是全在于把注意力按适当顺序一个接一个地放在全部有联系的点上？（见本章开始的引文。）这一点我不敢肯定。但是解题者的有条不紊工作的动人之处确在他能够逐个地专注于问题中的有关因素以及它们的各种组合上。

问题："未知量是什么？"和建议"盯住未知量！"的目的是同一个，即把解题者的注意力引导到问题的未知量上去。解题者有条不紊的工作在外人看来好象他是被一串心声指引着前进似的：

盯住整个问题。

盯住未知量。

盯住已知量。

盯住条件。

分别盯住每一个已知数据。

分别盯住条件的每一个分款。

特别注意一下那个你还没有用上的已知数。

特别注意一下那个你还没有用上的条件分款。

盯住这两个已知量的组合。

等等。

（2）注意会引出行动。

盯住未知量！未知量是什么？你怎样才能求出这种类型的未知量？根据哪些已知量你才能确定这种类型的未知量？你知道——你解过——具这种类型未知量的一个问题吗？投到未知量上的注意力将引导解题者到他的记忆中去查找曾经解过的具有同样未知量的问题。如果这样查找成功，解题者就可以尝试用从后向前推的方法去解他的问题（见第八章）。

以上考虑的情况（把注意力放在未知量上而引起的回顾）是特别常见和有用的。但是把注意力放在问题的任何其他有关因素上，也可能导致一个有利的接触从而得到有利的行动。比方说，把注意力放在问题陈述中出现的某个辞，可能会导致我们返回到那个辞的定义，由此得出该问题的一个有帮助的复述，并导致把有用的新因素引进复述的问题中。

（3）解题者相继把注意力放在问题的各种各样因素和它们的各种组合上——他希望能从中找出一个因素，由它可以达到某个有益的（或最有益的）行动。他希望在一闪念中能找到一个巧妙的想法告诉他怎样去做。

12.11 生产性的思考，创造性的思考。如果思考产生出目前这个问题的解法，那它就是生产性的，如果思考创造出解决未来问题的方法，那它就是创造性的，这种方法能运用的问题数目越大，种类越多，创造性也就越大。

有时解题者尽管没有成功地解出自己的问题，他也可能

是做了创造性的工作，因为他的努力可能会导致一个能应用于其他问题的方法。所以说，如果解题者留下来解决的是一个有意义的问题，它最终导致其他人发现了丰富多采的方法，则他就算是间接地做了创造性的工作。

我认为，把三等分任意角的问题流传下来的古代希腊人虽然没有解决这个问题，而且在那以后的若干个世纪里，还引起了大量徒劳无功的工作，但他们还是做了伟大的创造性的工作。这个问题揭露了一个互相对照着的事实，即任意角都可以二等分，但只有一些特殊的角（如90°）才能用圆规直尺把它三等分。于是由此引出了怎样把一个角分为5、7或17等分的问题和方程式有没有根式解的问题，最后导致了高斯，阿贝尔和迦罗华*）的伟大发现.这些发现所创立的方法可应用于无数问题上，这是最先提出三等分角的希腊人做梦都没有想到过的。

---

*阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802—1828）挪威数学家。迦罗华（Evariste Galois，1811—1832）法国数学家，群论的创始人。

第十三章　发现的规则？

虽然在这类情况下要去规定任一件事都是困难的，而且每个人自己的禀赋也应当成为他在这些行动中的指南，但我仍将尽力给初学者指出方法。

牛顿：《一般算术》，拉尔森逊译，1769年版，p.198。

由于实例比起说教来更容易使人学到本事，因此我认为去从事下列问题的解是合宜的。

牛顿，同上，pp.177—178。

§13.1　形形色色的规则

随着解题者工作的前进，问题的面目不断在变化。每一阶段，解题者都面临着新的情况和新的决断：在这个情况下该怎么做？下一步又该怎么做？如果他有一套完善的方法，有一个正确无误的解题策略，他就能根据严格的规则，从当前已知的条件出发，利用清晰的推理，去确定下一步该怎么办。不幸的是，从来就没有万能的完善的解题方法，没有能应用于一切情况的精确规则，十之八九是根本就不存在这样的规则。

不过各种各样的规则还是有的，诸如行为准则、格言，指南，等等，这些都还是有用的，有据的，尽管它们不象数学或逻辑的规则那么严格。数学规则，就象数学上"没有宽度的线"那样，泾渭分明。而很多有据的规则却并不是这样，它没有一条截然分明的分界线，有时候它既不是黑，也不是白，只是一片灰色的影子，它们给我们留着某些余地，留着让我们补充思考的余地。

看来，有些思维方式和思想习惯在很多——也许是绝大多数——解问题的场合是有作用的。不管怎么说，前几章在这方面已经提到了一些例子和讨论。所以我们现在不应当问"有没有关于发现的规则？"而应当提不同的问题，例如，"是否存在可在解题中起作用的表述思维方式的格言？"①

§13.2 合理性

我们称一个行动或一个信念是合理的，如果它是建立在充分考虑过的理由之上的，而不是仅仅根据一些不清晰的、含糊的来源（诸如习惯、未认真研究的印象、感觉或"灵感"等等）贸然提出来的。当我们对一个数学论证的每一步都作了精密的考查之后，我们便承认了这个定理，这是一个合理的信念的典型。从某种观点看来，数学论证的研究的最主要的价值，就是它使我们更接近于作为"理性生物"的人的理想的合理举止。

然而解题者究竟应当怎样合理地行事却并不是显然的。

①本章所讨论的大多数"规则"曾以稍微不同的形式在作者的文章中谈过，见参考文献〔20〕。

让我们把他的困难考虑得稍微具体一点。我们来设想一个经常出现的典型情况：解题者正在解某个问题A，而这个问题与另一个问题B是有联系的。研究问题B有可能使他更接近原来问题A的解。但另一方面，研究问题B也可能没有带来任何好处，反而损失了时间和精力。因此解题者就面临着一个决策：该不该暂时放弃对原来问题A的研究转而去研究新的问题B呢？使他左右为难的是他要不要引进B作为一个辅助问题。解题者能作出一个合理的决断吗？

解题者可能从问题B得到的一个重要好处就是研究B可以激起他的记忆，从而使得对解A有用的因素浮现出来。那么有哪些机会使得研究B能产生这种效果呢？看来纯粹基于清楚合理的论证想去估计这种机会是不可能的。在某种程度上，从某种意义上说，解题者必须要靠他的无法说清的感觉。

另一方面，也许存在着引进或反对引进B作为辅助问题的明确理由，我们在第九章中就曾经概述过某些这样的理由，解题者应怎样既顾及他的说不清楚的感觉又考虑到他的说得清楚的理由呢？他可以——而这一点看起来象是一个明智的行动——用适当时间去仔细考虑他说得清的理由，而把他的感觉朝后推到最后决断的时候。事实上，仔细考虑他的说得清的理由能使他有一个机会在正确方向上去影响他的感觉。看来除了这样做以外，很少能作得更合理了。

无论如何，解题者必须学会拿说不清楚的感觉去对照说得清楚的理由。也许这就是他必须学习的最重要的东西。在我看来，解题者主要的行动准则，或主要的格言应当是：

决不要做违反你的感觉的事，但也应当不带任何偏见地

去查看那些支持或反对你的计划的种种说得清楚的理由。

§13.3 经济，但并不预加限制

经济的原则是不用多加解释的，任何人都懂得珍惜自己的财富。当你去办一件事时，你总是尽可能少花金钱、时间和精力。你的大脑也许是你最主要的财富，而节省智力则可能是最重要的节约。能少做的就不要多做，这就是经济的一般原则。如果我们在求得解的过程中尽可能少地引进额外的材料，我们就在解题中执行了这一原则。

显然我们必须仔细研究问题本身以及那些直接属于它的材料，我们第一步应当是尝试在不用更多考虑别的材料的情况下就能找出一条通向解的道路。如果我们找不到这样一条路，那我们就去考查那些虽然不直接属于问题但仍然很接近它的材料。如果这样我们还是没有得到什么有用的启示，那我们可以再稍微走远一点。不过只要我们还存在着从某些比较接近的材料出发去解决所提的问题的希望，我们就不想把时间和精力花在那些牵强附会的东西上，这就是我们通常采取的态度。这类经济的常识可以用一句格言来概括：

尽可能离问题近些。

但是我们不能预先知道我们可能会留在离问题多近的地方。有些卓越人物，他们具有一种我们难以达到的完美的解题方法，能够确切地预言他将被迫走出多远以收集解题所必须的材料——但这是我们所做不到的。按照经济的原则，我们首先是考查所提问题本身，如果这样不够，我们就考查这个问题的紧邻，如果这样还不够，我们就考查得再远一些，什么时候我们的探查还没有找到一条通向解的道路，我们就

不得不走向更远。如果你已经下了决心，不惜任何代价也要解决问题，你也许确实要付出很高的代价。总而言之，你不可能预先限制代价。所以一个下了决心的解题者还必须接受无限制的原则，这是相对于经济原则的另一个原则：

要做好情况要求我们走多远就走多远的准备。

§13.4 坚持，但有变化

"天才即耐力。"

"天才就是一分聪敏加九十九分勤奋。"

上面这两句话，一句来自布冯*，另一句来自爱迪生**，两者表达的是同一个意思，即优秀的解题者必须是顽强的。他必须抓住问题坚持不放，绝不半途而废。

能用于整体的并不就能用于部分。当然罗，解题者在考查问题的某些细节或某些方面时，应当锲而不舍，不要过早放弃，但也要经常估计一下前景如何，不要对一个已经完全挤干了的桔子再挤下去。

要紧紧抓住已考查过的点子不放，直至找到了某些有用的启示为止。

解题者大量的工作是动员工作，他必须从记忆中把那些能用于眼下问题的条款检出来，这些需要回想起的条款，可能比较接近问题的某个方面或细节（与问题的其它方面和细节

---

*乔治·路易士·布冯 (Georges Louis Buffon,1707—1788) 法国作家和政治家。

**汤姆士·爱尔瓦·爱迪生 (Thomas Alva Edison, 1847—1931) 美国著名发明家。

相比较），而且也比较容易地通过这个方面或细节回忆起来。但是解题者事先并不知道究竟是哪个方面或细节会导致他去靠近他的目标，因此他需要去考虑种种方面和细节，当然他应当去考虑所有的比较基本的和比较有希望的方面和细节。

为了照顾全面而又不浪费时间，解题者不应在一个地方停留太久，也不要很快就返回到老地方。他应该寻求变异，在每一阶段都应该去考查新的什么东西——例如新的点子，或先前考查过的点子的一个新组合，或用一个新的观点去考查已经考虑过的点子和组合。所有这些的目的无非是想用一种新的更有希望的观点来看整个问题。

简言之，变化乃是坚持所必不可少的相对部分。正如上面所说的，你应当探索你坚持考虑着的事情，但也要努力去考查某些还没有被开发过的土地，并从中抓住某些有用的启示。

这句话告诫你，变化的最大敌人，它的最明显的障碍，就是墨守成规——即没有变化，没有任何进展地，一而再，再而三地重复同一件事。

§13.5 择优规则

如果一个问题有两种途径去解它，它们在其他方面都差不多，但其中有一个看上去似乎比另一个要容易些，那么我们自然先去试那条容易的。这样我们就有了一条（看似平常的）择优规则：

困难少的应先于困难多的。

事实上，这个说法是不够完整的：我们应当再加上"如

果其他方面都一样”作为限制条件。现在我们注意，这个必不可少的限制虽然没有写出来，但在这里以及对以后所有随之而来的各类择优规则，也都须这样去理解。下面是两条同样显然的这类规则：

较熟悉的应先于不怎么熟悉的。

与问题有较多共同点的条款应先于与问题有较少共同点的条款。

这些规则是显然的，但它们应用起来可能并不那么显然。特别是没有表达出来但又要那样理解的那个限制——“如果其他方面都一样”，要求解题者去使出所有的敏锐与技巧。

另外还有一些不太明显，不很一般，比较特殊的择优规则。为了有条不紊地去查核它们，我们要把涉及到的因素进行分类。下面的分类法可能是不完整的，不过它们至少对那些最显而易见的情况是吻合得很好的。

（1）问题所固有的材料。

（2）用得着的知识。

（3）辅助问题。

我们将在下面三节中接着讲述这些有联系的规则。

§13.6 问题所固有的材料

当你开始考查一个问题时，你还不知道问题的哪些细节是重要的。因此存在着过分强调某个不重要的细节的危险，而且你也许会陷在它里面不能自拔。因此，我们在开始时，要先把问题当作一个不可分割的整体去考查，不要钻到哪一个细节中去，在你真正了解问题的重点或目的之前，脑子里

想的应当是整个问题。*整体应先于部分。*

当你有了这样一个印象，即把问题作为一个整体来考虑已得不到更多的好处时，当你正要朝细节着手时，也许会注意到细节的分布很象一个组织：处于最高层的，最接近问题"中心"的是主要部分（正如我们讨论过的，假设条件和结论是求证问题的主要部分，未知量、已知量和条件则是求解问题的主要部分）。从问题的主要部分开始去仔细地考虑问题是很自然的，你应当清楚地、非常清楚地去观察所求结论和它的假设——或所求未知量，有用的已知量以及相联的条件。这就是说：*主要部分应先于其他部分。*

主要部分中的这一个或那一个也许可以再分，例如，假设可能由某几条假定组成，结论由几个论断组成，条件由几个分款组成，未知量可能是一个具有几个成分的多元未知量，也可能有几个已知量当你在第一次考虑时是合在一起的。在主要部分之后，接下去值得你注意的是它们的细分，你可以考查每一个已知量，每一个未知量，条件的每一个分款，假设中的每一条假定，结论中的每一个论断等等。总之，其他的细节将作为离问题中心比主要部分（最高层的）和主要部分的细分（次高层的）更远的部分予以考虑。可能对离问题中心较远的部分来说也有一个先后的顺序（例如，某个概念A可能出现在问题的叙述中，而A的定义可能要涉及另一个概念B，显然B离问题的中心就比A来得远）。注意，别走过了头。在其他一切都相同的情况下（这个限制仍然存在），比起远离中心的部分来，你会有更多的机会使靠近中心的部分更多地发挥作用。因此，*较近的部分应先于较远的部分。*

§13.7 用得着的知识

正如我们一再所说的，解题者的一个基本的（或者是最基本的）作用就是动员他的知识中的有关因素，并把它们与问题的因素联系起来。解题者在执行这一任务时可以“从里面”做起，也可以“从外面”做起。他可以停留在问题里面，把问题展开，仔细考查各个部分，希望在这样做的过程中引出某些有用的知识片断。另外，他也可以走出他的问题，在他已经掌握了的知识的各个领域里漫游，寻求有用的片断。在上一节，我们已经看到解题者如何从里面去做，现在我们希望看看他怎样从外面去做。

任何知识片断，任何过去的经验都可能对我们手头问题的解决有用。但是要把我们的知识都回顾一遍，或是逐点地回忆一下整个过去的经历，显然是不可能的。即使我们的问题是数学问题，即使我们只需要考虑我们知识中与某一数学分支有关的过去曾解过的问题或曾证明过的定理，即使这些内容都是比较清楚的，而且是很有条理的，我们也不能把所有这些材料都拿来逐个考查一遍。我们必须要对自己有限制，只能把那些最有机会用上的条款挑出来。

下面我们依次考虑求解的问题和求证的问题。

我们有一个求解的问题，我们已经考虑了它的主要部分，未知量，已知量，条件。现在我们想从记忆中找出某些可能有帮助的过去曾解过的问题。我们当然要找那些和我们现在的问题有某些共同点的问题，例如未知量或未知量之一是相同的，已知量或已知量之一是相同的，或某些直接涉及的概念是相同的等等。可能会有这样的情形，即过去解过的

问题，不管是近的还是远的，都或多或少有助于手头的问题，要去一一考查它们当然是太多了。然而在所有这些可能的接触点中，有一个应当引起我们更多的注意，即未知量。（特别地，我们不妨试着用一个和手头问题有同一类型的未知量的问题作为一个从后往前推的倒推解法的起点。见第八章。）当然，在特殊情况下，也可能有别的接触点更为可取，但是一般说来，当其他一切都一样时，首先，我们还是要盯住未知量①。在以前解过的问题中，与现在的问题有同一类型未知量的问题应先于其他的解过的问题。

如果我们找不到一个充分接近且和我们手头问题有同一类型未知量的解过的问题，我们可以去找一个有类似未知量的问题——即使这种问题也可以有较高的优先地位，虽然不是最高的优先地位。

如果我们有一个求证的问题，情况也是类似的。当我们要从记忆中去找出一个可能有帮助的过去证过的定理时，我们应盯住结论。与现在要证明的定理有同样结论的过去已证明过的定理应先于其他的已证明过的定理。

仅次于这种的，是那些与我们要去建立的定理有类似结论的过去已证明过的定理。

§13.8 辅助问题

解题者面临的最困难的抉择之一是选择一个适当的辅助问题。他可以从里面做去找这个问题，也可以从外面做去找它，或者是（这常常是最切实际的）交替着从里面做和从外

①HSI，pp. 123—129，盯住未知量。

面做去找它。总有某种类型的辅助问题，当其他一切都一样时，比其他的辅助问题有更多的机会发挥作用。

辅助问题可以用各种各样的方式去推进所提问题的解，它可以提供材料上的帮助，或方法论上的帮助，它可以起鼓舞性的影响作用，或可以起导引或演习的作用。但是不管我们寻求的是哪一种方式的帮助，那些与所提问题联系较紧密的辅助问题应当比那些联系松散的有更多的机会给予我们这类帮助。所以，与所提问题等价的问题先于那些较强的或较弱的问题，而后者又先于其余的问题。我们还可以换一种说法：双侧变形应先于单侧变形，单侧变形又应先于联系更松散的变形（见第九章）。

§13.9 总结

合理性。绝不要做违反你的感觉的事，但也应当不带任何偏见地去查看那些支持你的计划或反对你的计划的种种说得清楚的理由。

经济，但不预加限制。尽可能离题近些。要做好情况要求我们走多远就走多远的准备。

坚持，但有变化。要紧紧抓住已考查过的点子不放，直到找到了某些有用的启示为止。但也要努力去考查某些还没有被开发过的土地，并从中抓住某些有用的启示。

择优规则。

困难少的应先于困难多的。

较熟悉的应先于不怎么熟悉的。

与问题有较多共同点的条款应先于与问题有较少共同点的条款。

整体应先于部分，主要部分应先于其他部分，较近的部分应先于较远的部分。

在以前解过的问题中，与现在的问题有同一类型未知量的问题，应先于其他的解过的问题。

与现在要证明的定理有同样结论的过去已证明过的定理应先于其他的已证明过的定理。

与所提问题等价的问题应先于那些较强的或较弱的问题，而后者又先于其余的问题。或双侧变形应先于单侧变形，单侧变形又应先于联系更松散的变形。

对所有这些择优规则，我们心里都要加上一句话：如果其他都一样。

第十三章的习题与评注

13.1 天才，专家和初学者。天才能在不知道有规则的情况下按照规则行事。专家能在不想到规则时按照规则行事，但只要需要，他就能讲出应用于该情况的规则。初学者尝试着按规则去行事，他可以从成功或失败中学到它的真正含义。

这些话当然不是什么新的。圣·奥古斯汀*在谈到演说家和修辞学的规则时说："他们遵循了规则，因为他们是能言善辩的；他们不是能言善辩的，因为他们遵循了规则。"**

13.2 关于果子和计划。我要不要摘这果子？它是不是熟到可以摘了？当然，如果我们把它留在树上，它也许会长得更好味道更美。但另一方面，如果留在树上，它也可能被鸟或虫子咬坏，被风吹掉，被邻居的孩子摘走，或者遭到其他什么而丢失或糟蹋了。该不该现在就摘了它呢？它的颜色、形状、软硬、香味、一般外观都恰到好处了吗？

颜色、形状、软硬、香味都意味着滋味，但它们并不能

---

* 圣·奥古斯汀（Saint Augustin，354—430）主教，神学家与哲学家，主要著作有：《上帝的城》，《忏悔》。

** 第一句话的含意是，要做到"能言善辩"必须自觉或不自觉地遵循修辞学的规则；第二句话的含意是，若不掌握修辞学规律的精神实质，而只拘泥于规则的表面形式，则常常反而受到这些表面形式的束缚，而变得"不能言善辩"。

保证它。当我考查自己园子里的果子时，我能很有把握地估计这些征兆，至少我自认为是这样。但当我碰到不很熟悉的果子时，我的估计就不很可靠了。总之，从外观上去估计一个果子的味道不能认为是“完全客观的”，这种估计在很大程度上依靠个人的经验，而这种经验是很难从与具体的人无关的角度去完满地解释和彻底地证明的。

我应该采取这一步骤吗？我的计划已经成熟到可以拿来实行了吗？当然我不能肯定计划一定能行得通。如果我考虑的时间长一点，我也许对它执行的效果能看得更清楚些。但另一方面，我迟早总得做点什么，而目前我又想不出什么更可靠的计划。那么现在我该不该把计划开始付诸实现呢？它看上去有足够的希望吗？

无论是摘果子还是执行计划，我们都可能有某些清楚的理由，但我们很难单凭这些理由去作判断。我们对果子的收成成问题的情况在总的方面的估计，都不得不依靠（不完全能分析的）感觉。

13.3 工作风格。任何一个企图把“发现的规则”公式化的人都应该了解不同的解题者是用不同的方式工作的。每一个好的解题者都有自己独特的风格。

我们来比较一下两个解题者：一个具有“工程师”的气质，而另一个具有“物理学家”的气质。他们都试图去解同一个问题，但由于兴趣不同，他们的工作方式也就不一样。工程师着眼于一个干净利落有效的解（“成本最低”，“销路最好”的解），物理学家则着眼于隐蔽在解后而的原理。工程师更多倾向于有关“生产性”的思考，而物理学家则倾向于有关“创造性”的思考（习题12.11）。因此他们是运

用不同的方法去达到同一结果的。

我们更考虑得具体一点，当工程师和物理学家试图解一个题时，看来有两条途径。一方面，所提问题表现出与过去解过的某问题A有类似之处，另一方面，所提问题似乎又能按一个一般的模型B去处理。在这两种途径，即A与B之间，可以有一种选择。我倾向于认为，在这种情况下，当别的一切都一样时，工程师会选择研究具体的问题A而物理学家则宁愿去研究一般的模型B。

这个例子说明：解题者的工作风格实质上乃是一种择优方式，即优先地位属于谁。对§13.9中总结的那些择优规则，解题者也许还可以加上一些别的（例如：“一般模型先于特殊例子”）。此外，他还可以特别强调某些择优规则（“当出现矛盾时，规则X的分量就比规则Y要重”）。

第十四章　关于学，教，和学教[①]

那些曾使你不得不亲自动手发现了的东西，会在你脑中留下一条途径，一旦有所需要，你就可以重新运用它。

李希坦贝尔格*：《格言》

一切人的认识都从感觉开始，再从感觉上升到概念，最终形成思想。

康德**：《纯粹理性批判》1978年英文版，p.429。

我（打算）去写明，勤学的人总是能够看到他所探索事物的内部境界的，直至找到发明的本源，那时候他就洞悉了一切，好象事物就是他自己发明的一样。

莱卜尼兹：《数学著作集》，第七卷，p.9。

①§14.1—14.7的内容已作为在伯克利召开的美国数学协会第46届年会上的一个报告发表过，见参考文献中作者的文章〔28〕。

*李希坦贝尔格（Georg Christoph Lichtenberg）见习题10.1。

**康德（Immanuel Kant，1724—1804）德国哲学家。

§14.1 教不是一种科学

我将向你略抒关于学习的过程，关于教学的艺术和教师的训练等问题上的已见。

我的意见是我长期经验的结果，诚然这些个人的看法也许不一定是恰当的。假如教学这件事可以完全被科学的事实和理论所规定，那末我也就不必在谈论它们上面徒费你的时间了。然而，事情却并不是那样。教学，在我看来，不仅仅就是应用心理学的一个分支——无论如何，现在还不是。

教与学是互相关联的。关于学的实验和理论上的研究是心理学的一个广泛而深入的分支。然而这里有一个区别。我们这里涉及的主要是学的方面复杂的情形，诸如学习代数，学习教学，以及它们长期的教学效果等。而心理学则把主要的注意力和大部分工作从事于简化的短期的情形。因此关于学的方面的心理学虽可以给我们提供有趣的启示，然而它却不能在教学的问题上去冒充作最终的判断①。

§14.2 教学的目标

假如我们不明确教师的目标，我们就不能判断教师的工作。假如我们在教学的目标问题上有某种程度的意见不一，我们也就不能够很好地谈论教学的问题。

让我谈得具体一点。我在这里谈的是高中课程中的教学，而关于它的教学目标我有一种老式的想法：即首先和主

①参考E.R.Hilgard《论学习》（Theories of Learning）1956年第二版，pp.485－490

要的，是必须教会那些年青人去思考。

这是我的一个坚定的信念。你也许不总是那样想，但我假想你在一定程度上是同意的。假如你不认为"教会思考"是第一位目标，你也可能认为它是个第二位的目标——这样的话，我们在下面的讨论中也就有了足够的共同语言了。

"教会思考"意味着数学教师不仅仅应该传授知识，而且也应当去发展学生运用所传授的知识的能力：他应当强调由实践而得来的能力，有益的思考方式及应有的思想习惯。关于这个目标，可以给出一个完满的说明（我在关于教学问题上的整个已出版的著作可以作为一个完满的说明）。但是在这里，我想仅侧重说明两点就够了。

第一，我们这里所提的思想，当然不是指白天作梦，而是指"有目的"的或"有意识"的（William James*语），或"能导致后果"的（Max Wertheimer语）思想，这种思想在我们谈论的范围内（至少在一次逼近之内），也就是"解题"。不管怎么说，我认为，高中数学课程的主要目标之一应是发展学生的解题能力。

第二，数学的思想并不总是纯"形式"的，它并不仅仅就只是公理，定义和严格证明，而尚有许多从属于它的其它东西：如将所观察到的情况加以一般化，归纳的论证，从类比中进行论述，在一个具体问题中认出一个数学概念，或者从一个具体问题中抽象出一个数学概念等等。一个数学教师有很多机会使他的学生去了解这些极其要重的"非形式"的思想过程，我的意思是说，他应当更好地利用这种机会，应

* 威廉·詹姆士（William James 1842—1910）美国哲学家。

当大大地改善今天的现状。或许用一句不很全面但较简短的话来说，就是：让我们尽一切努力去教会证明，同时也让我们去教会猜测。

§14.3 教是一种艺术

教不是一门科学，而是一种艺术。这个看法已为许多人谈过多次了，因此在这里老调重弹，似乎有些不合时宜。然而假如我们并不是去从事什么崇议宏论，而只是谈些具体的东西，那末也许会觉得此中还是有点门道可究的。

教学与唱戏，显然有不少共同之处。比如，你要给你这个班去讲一个很熟的证明，在过去多年中你已在同一课程中讲过它多遍了，你对此实际上已无多大兴趣——但请千万不要在课堂上显露出来：假如你表现出厌烦，那末整个课堂也会如此。当你开始证明的时候，要摆出一副兴奋的模样；当证明进行的时候，要装出有很多点子；当证明完结的时候，还要表示出惊奇和得意。你多少应当作一些表演，因为有时候你的学生也许从你的举止中比从你所讲的主题中学到的更多。

我必须承认，我是乐意于一些为数不多的表演的。特别是我现在已经老了，在数学上已经很难再去发现什么新的东西了，因此重演一下过去是如何发现这一点或那一点的，心中会感到一点快慰。

教学，不很明显地，与音乐也有共同之处。你当然知道，教师讲解一个问题，不能光讲一遍或两遍，而往往要讲三遍、四遍甚至多遍。然而，把同一句话不停顿地毫无变化地重复多遍，那会十分令人厌烦而且要起到反作用。这里，你可以向

作曲家学习，看他们是怎样处理这一问题的。音乐的一种主要艺术格式是“变奏旋律”，将这个音乐中的艺术格式用到教学中，就应是：开始时用最简单的形式讲你的东西，然后略加变化地重复它，然后又增加一点新的色彩再次重复它，等等；在你结束时又可以回到原来简单的形式上。另一种音乐艺术格式是“轮旋曲”，将轮旋曲从音乐中转移到教学里，就变成：你把同一句最重要的话不加改变或很少改变地重复几次，然而在两次重复之间插入若干适当对照的叙述材料。我希望你下一次听贝多芬的变奏曲或莫扎特的轮旋曲时，会领悟到改进教学的一点启示。

有的时候，教学显得象是一首诗，有的时候，它又显得有损雅听。我可以同你谈谈关于伟大的爱因斯坦的一则小小轶闻吗？在一次宴会上，我听见他同一群物理学家们说：“为什么所有电子都带相同电荷？”“为什么所有羊粪蛋都是一样的大小？”爱因斯坦为什么要说这些？仅仅是为了让时人俗客们惊愕一番？我想他是不屑为此的。也许，它是意味深长的。我并不认为偶然听到的这句话是爱因斯坦信口说的。不管怎么说，我从中学到了一些东西：抽象的道理是重要的，但要用一切办法使它们能看得见摸得着。什么也不作，对于弄清你的抽象观念，也许是太好了或太坏了，太有诗意了或太平凡了。正如蒙泰尼*所说，真理是这样的伟大，我们不应当藐视任何能够达到它的手段。因此在你的课堂里，假如感染着你的东西或具有诗意，或听来欠雅，都以不

---

* 蒙泰尼（Michel Eyquem de Montaigne，1533—1592）法国哲学家，散文作家。

绳以清规戒律为好。

§14.4 学习三原则

教学是一种有着无数门道的行当。每一个好的教师都有自己几个拿手的高招，并且每个好的教师又与其他好的教师不同。

任何有效的教学法必然以某种方式与学习过程的性质互相关联着。对于学习过程我们并不知道得很多，然而对于它的一些比较显著的特点即使作一个粗略的概括，也足以对我们这一行中的门道给出若干受欢迎的阐明。让我们以学习的三条"原则"来表述这一粗略的概括。它们的叙述形式和组合是我选择的，然而"原则"本身决不是新的发明：它们早就被用不同形式反复叙述过了。它们来自长时期经验的积累，为伟大人物的判断所认可，并且也是关于学的心理学研究的成果。

这些"学习的原则"也可以当作为"教学的原则"，这也是在这里讨论它们——以后要谈得更多——的主要缘故。

（1）主动学习，许多人在不同场合都讲到，学习应当是主动的，不要只是被动的或消极接受的。仅仅靠阅读或听课、看电影而不自己动脑筋，很难学到什么东西，当然更谈不上学到很多东西了。

还有另外一种常见的与之密切相关的说法：学习任何东西的最好途径是自己去发现。李希坦贝尔格(十八世纪德国物理学家，因善写格言而知名）添加了一段有意思的话："那些曾使你不得不亲自动手发现了的东西，会在你脑海里留下一条途径，一旦有所需要，你就可以重新运用它。"下面的

一段叙述，虽然文采略逊，却用得更广：“为了有效地学习，学生应当在给定的条件下，尽量多地自己去发现要学习的材料。”

这就是主动学习原理，这是一条很老的原理，它是“苏格拉底*方法”的思想基础。

（2）最佳动机。学习应当是主动的，上面已经谈了。然而倘若学生没有学习的动机，他就不会去学习。他必须要有，譬如说，某些激励的因素，某些报偿的期望才能促使学习。所学材料的兴趣乃是学习最佳的刺激，强烈的心智活动所带来的愉快乃是这种活动最好的报偿。于是，当我们不能得到最佳的动机，我们就应该争取得到第二位、第三位的动机，并且不应当忽略掉那些不那么内在的动机。

为了有效的学习，学生应当对所学习的材料感到兴趣并且在学习活动中找到乐趣。此外，除了这些学习的最佳动机之外，也还有其他的、其中有些也是值得考虑的动机（例如不学习会带来惩罚也许是最后一个可供考虑的动机）。

我们把上面的叙述称为最佳动机原理。

（3）阶段序进。让我们从常常引用的一句康德的话开始：一切人的认识，都从感觉开始，再从感觉上升到概念，最后形成思想。英译本用了“cognition（认识），intuition（感觉），idea（思想）”等词。我说不清楚（谁能说清楚？）康德是在什么样的确切含义下使用这些词的。但请允许我谈一下我对康德这句格言的理解：

学习从行动和感受开始，再从这里上升到语言和概念，

---

*苏格拉底（Socrates，前470—399）古希腊哲学家。

最后形成该有的心理习惯。

请你一开始就将这个句子里的词按你自己经验所能具体描述的意义去理解（促使你按个人经验去思考是所期望的结果之一）。“学习”应当使你想起课堂，你自己作为一个学生或教师亦在其中。“行动和感受”则可想象为操作或者看见具体的东西诸如石子，苹果，或圆规直尺，或实验仪器等等。

词的这种具体解释，当我们联想着某些简单粗浅的事物时，当然显得比较容易和自然。然而，等一会我们可以发现，在那些涉及更加复杂和高深材料的著作中，也存在着认识的类似阶段。让我们将它们区分为三种阶段：探索阶段，形式化阶段和同化阶段。

第一种探索阶段更接近于行动和感受，处在一种比较直观和启发式的水平上。

第二种形式化阶段引入了术语、定义、证明等，上升到了一个较为概念化的水平上。

最后出现的是同化阶段：这里应当有一种洞察事物“内部境界”的尝试，应当让所学习的材料经过消化吸收到学生的知识的体系中，到学生的整个精神世界中去；这个阶段一方面铺平了通向应用的道路，另一方面又打开了通向更高级的推广的道路。

我们综合一下：为了有效的学习，在语言文字表达及概念建立的阶段之前应当先有一个探索阶段，最后所学的材料应归纳到学生的整个理性观念中去并促成它。

这就是阶段序进原理。

§14.5 教学的三原则

教师应当了解学习的方法和途径。它应当避开无效的学习途径并利用有效的途径。这样他就能够很好地运用我们刚才概述过的三原则，即主动学习原则，最佳动机原则和阶段序进原则，这些学习的原则也是教学的原则。然而这里有一个条件：为了利用这样一个原则，教师不仅仅光是从耳闻中了解它，而且他应当在自己认真思考过的个人经验基础上出自内心地去理解它。

（1）主动学习。教师在课堂上讲什么当然是重要的，然而学生想的是什么却更是千百倍地重要。思想应当在学生的脑子里产生出来而教师仅仅只应起一个产婆的作用。

这是一种古典的苏格拉底的格式，而最适合于这种格式的教学形式是苏格拉底的对话。中学教师比起学院里的讲师有一个明显的方便之处，就是他能够更广泛地应用对话形式。不幸的是，甚至在中学里，时间也是限定的，许多规定的内容要去完成，因此事情不能都用对话的形式去进行。然而原则是：在给定的条件下，应让学生们尽可能多地靠他们自己去发现。

能够做的总是比已在做的要多，我确信如此。我在这里向你推荐一种小小的门道：让学生主动地为（以后他们必须要去求解的）问题的明确表述贡献一份力量。假如学生们在问题的提出过程中自己起过作用，则以后在学习中就必然会显得更加主动积极。

事实上，在科学家的工作中，去明确表述出一个问题也许是发现的更主要的一个部分。问题的求解比起问题的明确

表述来，就常常不需要那么多的见识和独创了。因此，让学生在表述工作中分担一部分，你就不仅能推动他们更加努力地去工作，而且也教给了他们一个应有的思维方式。

（2）最佳动机。教师应当把自己看成是一个推销员：他要把某些数学知识推销给年青人。现在，假如推销员在推销工作中碰到了困难，他所期待的顾客并不买他的货，那么他不应当光是去责难顾客。请记住，从原则上讲，顾客总是对的，有时候从实际上讲，他们也是对的。青年人学不进数学也许是有道理的，他可能既不懒也不笨，只不过是对别的东西更感兴趣而已　　在我们周围世界里有多少使人感兴趣的东西呀。作为一个教师，作为一个知识的推销员，他的责任就是使得学生们相信数学是有趣的，使他们感到刚刚讨论的那个问题是有趣的，让他做的那些题是值得他努力去做的，等等。

因此，教师应当注意选择好他提出的题目，将它整理好并进行适当的介绍。从学生的角度去看，题目应当是有意思的和跟他们有关联的，如果可能的话，最好是与学生的日常生活有联系，而且题目的引入最好能带点诙谐与悖论。或者，题目应当以最熟悉的知识为出发点，如果可能的话，它最好带有一些普遍兴趣或实际应用的特色。假如我们想鼓励学生作出真正的努力，我们总得给他们讲出点道理，使得他感觉到值得化力气去干这件事。

最佳动机就是学生在他的工作中的兴趣。然而还有许多其它的不应当忽视的动机。让我在这里推荐一个小小的实际可行的办法：在学生开始作题之前，先让他猜猜结果或猜猜部分的结果。于是表示过意见的孩子就约束住了自己，因为

结果如何多少影响到他的面子和自尊。因此他就急于要知道他的猜测是对的或是错的，这样他就会积极贯注于他的工作和课堂作业上——也就无暇去打瞌睡或捣乱了。

事实上，在科学家的工作中，猜测几乎总是走在证明的前头的。因此，让你的学生们去猜结果，这不仅调动了他们工作的积极性，并且你还教给他们应有的思维方式。

（3）阶段序进。在高中教科书平常取材中，有一件要不得的事就是它们几乎无例外地仅仅包含常规的习题。常规的习题是短程的习题，它只是提供了对一个孤立法则的应用练习。这类常规的题目也许是有用的甚至是必需的，我并不反对它们，然而它们忽略了两个重要的学习阶段：探索阶段和同化阶段。这两个阶段都是要寻求手头上的问题与周围世界和其它知识领域的联系，不过第一个阶段是在正式求解之前，而后一个阶段则是在正式求解之后。然而常规的习题，虽然明显地联系了它所要描述的法则，但它极少与任何其它东西有关联。因此为了寻求深入的联系，它就没有多大用处。跟这些常规的习题对比，高级中学应当时常介绍更多一些带挑战性的题目，一些具有丰富背景并值得深入探索的题目，一些能预先品味到科学家工作的题目。

这里有一个实际工作上的提示：假如你准备拿到班上讨论的题目是合适的，那末不妨让你的学生预先作一些探索工作，这可以提高他们正式解题的兴味。此外保留一点时间对已完成的解进行一些回顾性的总结讨论，这对后来的题目的求解将是有好处的。

（4）经过了如上极不完全的讨论之后，我现在要结束关于主动学习、最佳动机和阶段序进三原则的解释工作了。

我认为这些原则可以贯彻到教师日常工作的各个环节中去并且能使他成为一个更好的教师。我同样认为这些原则也应当贯彻到整个教学计划中去，贯彻到每门课程的计划以及每门课程的每一章节的计划中去。

然而我决不是说你必须要接受这些原则。这些原则发端于某一种世界观、某一种哲学，而你也许信奉的是另一种哲学。现在在教学中，也象在其他工作中一样，你信奉的是哪一种哲学并不是十分重要的，要紧的是是否信奉一种哲学。而更要紧的是你想不想去贯彻你的哲学。我最厌恶的仅仅是那些口惠无实的教学原则。

§14.6 例

例子总是比说教来得强，让我们静心来研究几个例子吧——我总认为例子比泛谈更重要。我在这里涉及的主要是高中水平的教学，因此我将向你介绍一些高中水平的例子。在作高中水平的题目的时候，我常常感到一种满足，我可以告诉你为什么——在作题中我常常设法让这些题目在一个方面或另一方面重温我自己数学上的经历：我在一种缩小了的规模上重演我过去曾作过的工作。

（1）一个七年级的题目。苏格拉底式的对话是教学的基本艺术形式。在一个高中低年级班里，或许是七年级，教师可以从如下对话开场：

“在旧金山中午的时刻是什么？”

“可是老师，这谁都知道…”这也许是一个活泼的女孩子在说，她甚至可能说：“老师，您真糊涂：十二点。”

“那末在圣克利门特中午的时刻是什么呢？”

"十二点——当然，不是午夜十二点。"

"那末在纽约中午的时刻是什么？"

"十二点。"

"但我想旧金山与纽约是不会在同一时刻到达中午的，但你却说这两个地方的中午时刻都是十二点！"

"是的，旧金山中午是西部标准时间十二点而纽约是东部标准时间十二点。"

"圣克利门特是那一类标准时间呢？西部还是东部？"

"当然是西部。"

"旧金山和圣克利门特在同一时刻达到中午吗？"

"你不知道怎样回答吗？好，猜猜看：是旧金山中午来得早呢还是圣克利门特，或是这两地正好在同一时刻到达中午？"

你觉得我对七年级孩子的苏格拉底式谈话的想法怎样？不管怎样，你会有些想法的。通过适当的对答之后，模仿苏格拉底的教师，应当从学生中引导出以下几个要点：

(*a*) 我们必须把"天文的"中午与常规的或"公认"的中午区别开来。

(*b*) 这两个中午的定义。

(*c*) 了解"标准时间"：为什么地球表面要划分时区以及它们是怎样划分的？

(*d*) 问题的明确表述："在西部标准时间的什么时刻旧金山是天文上的中午？"

(*e*) 解决这一问题唯一需要的具体数据是旧金山的经度（取适于七年级学生的近似数据）。

这个题目并不很容易。我将它在两个班进行了试验，这

两个班的参加者都是高中教师。一个班在解题中大约化去25分钟，另一个班化去约35分钟。

（2）我必须告诉你们这个小小的七年级的题目具有各种各样的好处，它主要的好处也许是它强调了往往为课本中通常题目所忽略掉的一种基本的认识途径，即从具体的事例中去认识基本的数学概念。为了解出问题，学生必须要认识一个比例关系：在地球表面一个局部地段太阳处在最高位置的时间随着这个地段的经度按比例地变化。

实际上，与高中课本里那些令人生厌的人为的题目相比，我们的题目是一个完全自然的、“实在的”问题。在应用数学的一系列问题里，问题的适当明确表述总是一件重要的工作，并且常常是最重要的工作。上面的这个可以提给七年级中等班级里去的小题目正好具有这个特色。还有，应用数学中的重要题目是可以导致实际应用的，譬如说，采用一个更好的工艺过程等，我们的小题目这方面可以用来向七年级学生说明为什么要采用24个时区制（其中每一时区有同一标准时间）。总起来说，我觉得这个题目，假如教师运用得较好，将会有助于未来的科学家与工程师去发现自己的使命，而对于那些以后专业上不用数学的学生来讲，也有助于促进他们智力的成熟。

我们还可以注意到这个题目描述了前面曾提到的那几种小手法：让学生在问题的明确表述中主动贡献一份力量〔参阅§14.5（1）〕。实际上，导致问题明确表述的探索阶段是特别重要的〔见§14.5（3）〕。然后，还让学生去猜测解答中的重要部分〔见§14.5（2）〕，等等。

（3）一个十年级的题目，我们来考虑另一个例子。让

我们从一个也许是最为熟悉的几何作图题——给定三边求作三角形——开始。鉴于类比是一个发现的丰富源泉，于是自然就提出这样的问题：上述题目在立体几何中的类比是什么？一个具有一点立体几何知识的中常学生，就可能提出下面的类比问题：给定六条棱，求作一个四面体。

这里也许应当插一句话，这个四面体的题目很接近于高中水平用“机械制图”可以解决的实际问题。工程师和设计师常常用画好了的图样，对要建造的机器或房子的三维形状的各个部位给出了精确的说明。我们现在则是要用指定的棱去建造一个四面体。我们可以设想，比如说，把它从一块木头中雕刻出来。

这就要求这个题目应当可以用直尺和圆规精确求解，并且引导到去讨论这样一个问题：应当画出四面体的哪一部分图？从一个组织得较好的班级讨论中，我们可以最后把问题表述成如下形式：

给出四面体$ABCD$六条棱的长

AB，BC，CA，AD，BD，CD，

把$\triangle ABC$视为四面体的底，用圆规和直尺作出底面和其它三个面的夹角。

这些角在把木块雕刻成所求立体时是需要预先了解的。还有诸如下列其它一些四面体的因素在讨论中也会提出来：

(a) 从顶点D到底面的高，

(b) 这个高在底平面上的垂足。

(a) 和 (b) 将有助于增进所求立体的知识，它们可能会有助于找出所求的角，因此我们也应当想法把它们画出来。

（4）当然，我们能够画出图14.1中的四个三角形面（有些在作图中画过的小圆弧仍然保留在图中，以便表示$AD_2=AD_3$，$BD_3=BD_1$，$CD_1=CD_2$）。假如将图14.1画到硬纸片上，加上三条贴边，再将图样剪下，并将它沿三条线折叠起来，糊上贴边，这样就得到了一个立体模型，从它身上我们可以粗粗地量出问题里的高和角度。这个硬纸片的工作是很有启发的，但它并不是我们所要求的工作，我们应该用直尺和圆规去作出问题中的高，它的垂足和那些角度。

（5）先把问题或它的一部分当作"已经解出"也许对考虑问题会有帮助。我们形象地想一下，图14.1当它三个侧面中每一个都围着底的一边旋转而上升到应有位置上时，会变成什么样。图14.2表示了这个多面体在底面（$\triangle ABC$）所在平面上的正交投影。点F是顶点D的投影；它是由D引出的高的垂足。

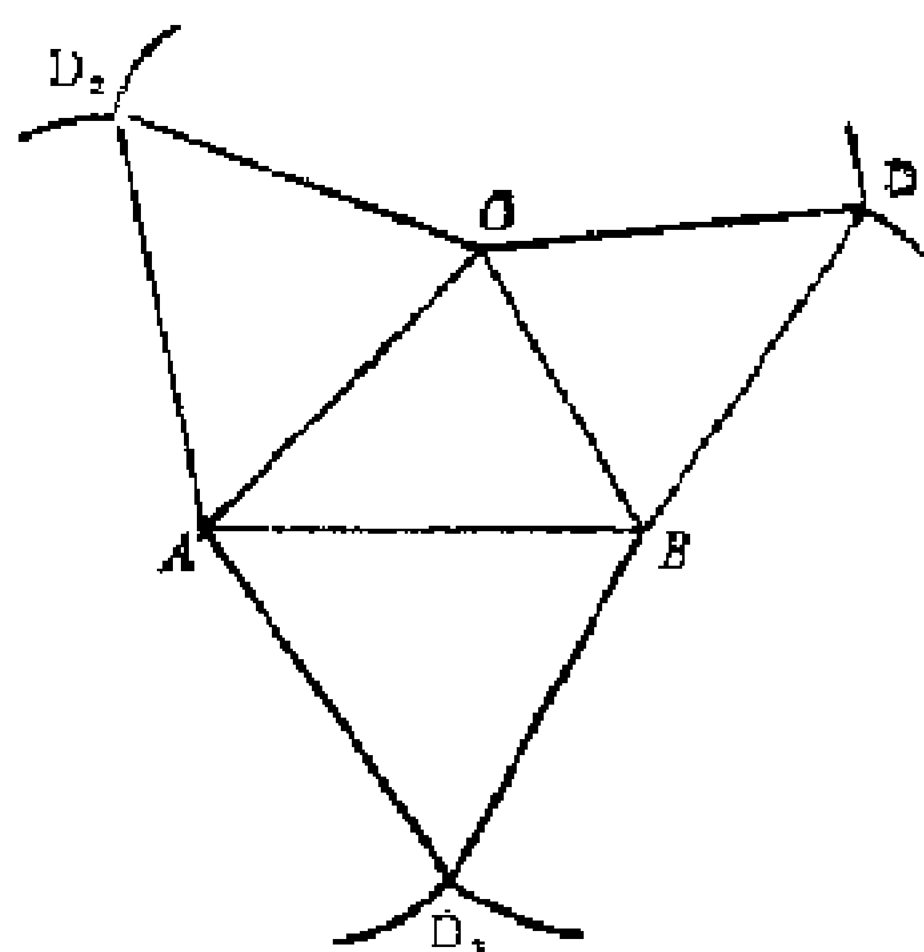


图14.1　由六条棱作四面体



图14.2　成品的一个样子

（6）我们形象地设想一下在有或没有硬纸片模型时图

14.1到图14.2的转化。现在让我们把注意力集中于三个侧面之一，即$\triangle BCD_1$上，它最初与$\triangle ABC$处于同一平面上，即图14.1的平面，我们姑且把它当作水平面。让我们观察三角形BCD_1绕着它的固定边BC旋转，并且让眼睛光跟着运动的顶点D_1转。这个顶点描出了一段圆弧，这个圆的中心是BC上的一点，这个圆的所在平面垂直于水平的转轴BC，因此D_1在一铅直平面内运动。于是，运动顶点D_1的轨迹在图14.1的水平面上的投影就是一条直线，它垂直于BC，并且通过D_1点原来所在位置。

加上其余两个，这样共有三个旋转的三角形。于是就有三个运动的顶点，每一个在各自铅直平面上划出一道圆弧的轨道——向着什么目标？

（7）我想，到现在为止读者已经可以猜到了结果（也许甚至在读完上面小节之前已经猜到）：由D_1，D_2和D_3三点的初位置（见图14.1）分别引BC、CA和AB的垂线，这三条线将交于一点F，它就是我们附加的目标（b），见图14.3（为了定出F，画出两条垂线就够了，但我们可以用第三条去检验作图的精确性）。下面要作的就比较容易了，令M为D_1F和BC的交点（见图14.3）。作直角三角形FMD（见图14.4），它有斜边$MD=MD_1$和直角边MF。显然FD就是高〔我们的附加目标（a）〕，而$\angle FMD$就是底$\triangle ABC$所在平面和侧面$\triangle DBC$所在平面交成的二面角，这也是本题所要求的。

（8）一个好的题目的优点之一是它常常可以引申出其它好题目。

上面的解法也许，而且应该，在我们脑中留下一个疑

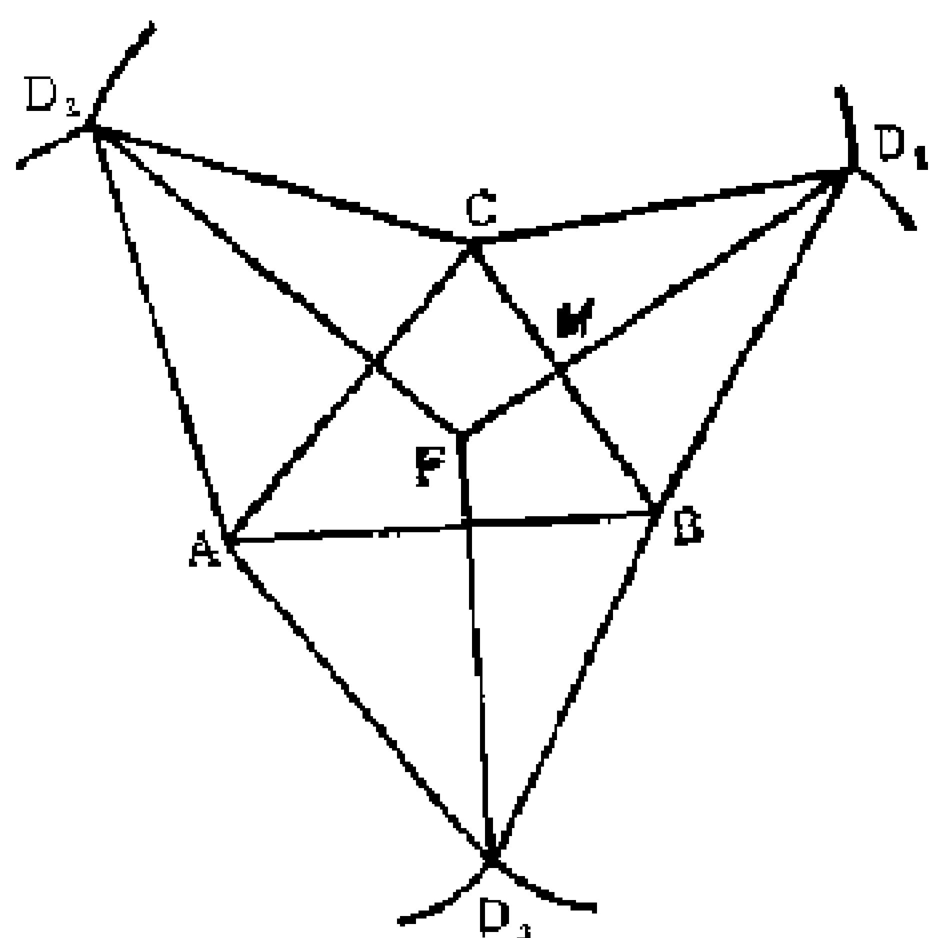


图14.3　三个旅行者的共同目标

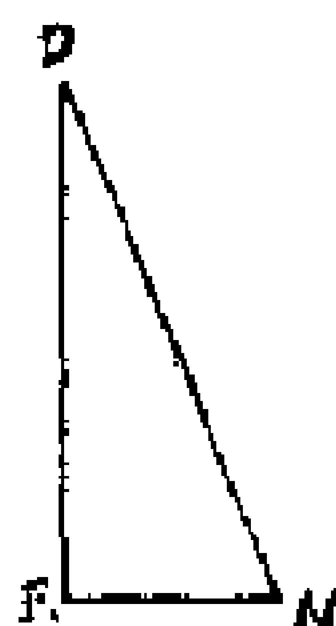


图14.4　其余的就容易了

问。我们找到由图14.3所表示的结果（即上面所述的三条垂线共点）是由于考虑了旋转物体的运动。然而结果是一个几何命题，因此它应当仅仅依靠几何学而不依赖于运动的想法而得到。

现在，从前面的论述〔（6）和（7）〕中除去运动的想法并且将结果建立在立体几何的想法上（面的相交，正交投影）① 已经较为容易了。然而结果又是一个平面几何的命题，因此它应当不依赖于立体几何的想法面仅仅建立在平面几何上。（怎么作？）

（9）注意到这个十年级的题目也描述了各种前面讨论过的关于教学的观点。比如，学生可能而且应当参与问题的最后明确表述，有一个探索阶段，和一个丰富的背景。

此外我想在这里再强调一点：题目要出得能吸引学生的

①参阅§6.2（3）.

注意。虽然这个题目不如七年级那个题目那样可与日常生活经历相联，但它却从一个最熟悉的知识（已知三边求作三角形）出发，一开始就侧重于一个有兴趣的想法（类比），并且它指出了最终的实际应用（机械制图）。只要下一点工夫，再加上良好的愿望，教师是应该能够在这个题目上把所有不是太笨的学生的注意力都吸引过来的。

§14.7 学习教学

还留下一个更大的题目需要讨论，这是一个重要的题目——学习教学。在讨论这个题目的时候，我的心情是愉快的：因为我几乎与"官方"立场是一致的（我这里指的是刊载于美国数学月刊67（1960），982—991上的文章"美国数学协会关于数学教师训练的意见书"。仅仅是为了说话简便，我冒昧把它说成"官方意见"）。我将集中谈两点。在过去，特别是在最近十年的教学中，我曾在这两点上投入过大量的工作与思考。

粗略地说，在我脑中的两点，其一涉及到"业务"课程，另一涉及到"方法"课程。

（1）业务。可悲的（现已被众所承认的）事实是我们的高中教师，按平均水平来看，他们的业务知识是不充分的。当然，有一些水平较高的教师，但也有另外一些人（我就碰到几个），他们的优点我必须学习，但他们的数学水平，却实在不能令人景仰。有关业务课程，官方意见也许是不充分的。然而凡它所采纳的意见将能在改革中实施，这是毫无疑问的。我想把你的注意力转到在我看来应当附加到官方意见中去的一个要点上。

我们在任何学科上的学识，都由知识和才智这两部分组成，才智是运用知识的能力，当然，假若没有一定的独立思考，能动性和创新精神，也就谈不上才智。在数学中，才智就是做问题，找出证明，评议百家，流畅地运用数学语言，及在各种具体场合辨认数学概念的能力。

每一个人都认为，在数学里，才智比起仅仅具有知识来显得更为重要，而且更为重要得多。每一个人都要求高级中学不仅应当向学生传授知识，而且还应当开发他们的才智，他们的独立性，能动性和创新精神。然而却几乎没有人对数学教师要求这些动人的品格——这不是怪事吗？官方意见中对于教师的数学才智一事未置一喙。一个攻哲学博士学位的学数学的学生必须要做研究。当他达到那个阶段之前，他可以在研究生班，问题讲习班或者在硕士论文的准备阶段中找到一些独立工作的机会。然而对未来的数学教师却没有提供这样的机会——官方意见中关于任何这一类的独立工作或研究工作未置一词。假如教师没有某种创造性工作的经历，那么怎么能够叫他去激励、引导、帮助或甚至去察觉他的学生的创造性活动呢？一个教师如果他所懂得的都是数学里易于接受的东西，他就不可能促使学生去主动学习。一个教师如果在他的一生中从未有过什么巧思敏想，那么当他碰到一个有这种敏思的学生，大概就不会去鼓励他，反而会去申斥他。

这里，在我看来，对于一般水平的高中教师来讲，在业务知识方面存在的最糟糕的问题是：他没有主动的数学工作的经验，因此，他甚至没有实际掌握他要去教的那些高中材料。

我并没有什么灵丹妙药，但我曾作过些试验。我曾举办

并多次指导过一个教师的解题讲习班。这个讲习班上提出的题目并不要求很多高中水平以外的知识，但却要求有一定的程度，而经常是要求有较高程度的专心和判断力——在一定意义上讲，这些题目的解法是"创造的"工作。我曾试着这样来安排我的讲习班，使得学生们不加很多改变地就能够用上在班里提供的大部分材料，甚至还可以使他们有一些教学实践的机会（在小组里互相教学）参阅本书第一卷 pp.311—315。

（2）方法。从我与上百名数学教师的接触中，使我得到了一个印象，他们对于上"方法"课程热情要少得多。另外对数学系开设的常规课程，教师们的反应也是同样。我同一个教师开诚地谈了一下这件事，发现有一个代表着较普遍情绪的形象说法："数学系给我们的是啃不动的硬牛排，而教育学校则给的是一碗没有肉的白水汤"。

事实上，我们应当鼓起勇气公开辩论下面这个问题：方法课程究竟需不需要？它们究竟有没有用？公开辩论比起私下里普遍议论，更便于我们去得到一个正确的答案。

这里肯定会有很多问题。教学是可以教的吗？（教学是一种艺术，正如我们许多人所想的——但这种艺术是可以教的吗？）有教学方法这么一种东西吗？（教师教的决不会超过教师有的——教学是教师个人的事——有多少好教师就有多少好方法）。训练教师的时间在业务课程、方法课程和教学实习这三者中进行调配，我们是否应当在方法课程上少化一点时间？（许多欧洲国家化很少的时间）。

我希望比我年青和有精力的人，在某一天会提出这些问题来，并虚心地用适当的论据去辩论清楚这些问题。

我在这里说的仅仅是我自己的经验和自己的意见。事实

上，我已经隐隐地回答了所提出的问题：我相信方法课程会是有益的。实际上我在前面所介绍的内容就是方法课程的一种样板，或者说得更确切一些，按我的看法，它们是提供给数学教师的一门方法课程所应当具备的某些论题的一个概述。

事实上，所有我给数学教师们举办过的班，在一定程度上都是打算开设方法课程的。班的名称是属于业务性的，但时间实际上是在业务课和方法课之间分配的，也许十分之九用于业务而十分之一用于方法。假若可能，这个班就办成对话形式，一些方法上的说明由我自己或听众附带地插在其中。然而一个结论的导出或是一个问题的解，几乎完全是在它的教育学含义的简短讨论下给出的。我问听众"你能把这些用到你的班级中去吗？""你能在课程的哪个阶段用上它？""哪一点需要特别关注？""你怎样设法使它们为人理解？"而这类性质的问题（适当地具体化）也正式地出到考试卷上。我的主要工作，简而言之，就是选出这些问题（就象我上面介绍过的两个问题），用它们去生动地描绘某些教学模型。

（3）官方的意见把"方法"课称为"课程研究"课，也没有讲出多少道理来。不过我想，你可以在那里找到一条卓越的意见，但多少有点隐晦。你必须把两个和两个放在一起，把在"课程研究课"这部分中最后一句话和对于水平Ⅳ的意见结合起来去看。但这是十分清楚的：一个要给数学教师开方法课的学院讲师，他对数学的了解应当至少在硕士级的水平上。我还想加一句：他也应当具有某些，说得谦虚一点，数学研究的经验。假如他没有这样的经验，那么他怎么

能够把对于未来的教师们是最重要的东西，即创造性工作的精神传授给别人呢？

你已经化了很长一段时间在听着一个老人的唠叨了。假如你能对（很据以前的讨论所得出的）以下建议进行一些思考，那么你就会从这席谈论中获得一些实在的好处。我建议下列两点应当添加到协会的官方意见中去：

Ⅰ．数学教师的训练，应当在解题讲习班这种形式或在任何其它适当的形式下，向他们提供有适当水平的独立的（“创造性”的）工作的经历。

Ⅱ．方法课应当在与业务课程或教学实习紧密结合的情况下开设，假如可能的话，它应当由既有数学研究又有教学经验的讲师去开设。

§14.3　教师的思和行①

我前面已经谈过，我给教师们所讲授的，在一定程度上说，是“方法”课程。在这些讲授中，我的目的着眼于教师日常工作中的实际应用上。因此不可避免地，我必须对教师的日常工作和教师的思想举止多次表示我的意见。我的评论逐渐趋向于一种固定的形式，最后我把它们总结成为“教师十诫”（见下页）。我想再对这十条规则加一点评论。

在形成这些规则的时候，我心里想的是这些班的成员——在高中教数学的教师们。然而这些规则可以应用到任

①本节可以脱离前面各节独立阅读（有小部分重复）。它原载于教育学院教育月刊，温哥华，维多利亚no.3，1959，pp.61—69上经过编辑的同意，并略作修改后，重新发表于此。

何教学的场合，以及任何水平的任何(所教的)学科上。特别在高中水平上，数学教师比起其他学科的教师来，在某些规则的应用上，具有更多和更好的机会，其中尤其是规则6，7和8。

教师十诫

1. 要对你讲的课题有兴趣。
2. 要懂得你讲的课题。
3. 要懂得学习的途径：学习任何东西的最佳途径就是靠自己去发现。
4. 要观察你的学生的脸色，弄清楚他们的期望和困难，把自己置身于他们之中。
5. 不仅要教给他们知识，并且要教给他们“才智”，思维的方式，有条不紊的工作习惯。
6. 要让他们学习猜测。
7. 要让他们学习证明。
8. 要找出手边题目中那些对解后来题目有用的特征——即设法去揭示出隐藏在眼前具体情形中的一般模型。
9. 不要立即吐露你的全部秘密——让学生在你说出来之前先去猜——尽量让他们自己去找出来。
10. 要建议，不要强迫别人去接受。

这些诫言是根据什么权威得出来的？亲爱的教师，除了你自己揣摩过的经验和熟虑过的判断之外，不要接受任何权

威。对于任何告诫，都应该自己先弄清楚它在你的具体情形中意味着什么，把它拿到你的班级里去体验，并且通过试验之后再作出判断。

现在让我们逐一地来考虑这十条规则，并主要联系数学教师的工作来考虑：

（1）有一条绝对无误的教学法——假如教师厌烦他的课题，那么整个班级也将无例外地厌烦它。

这就足够证明第一和首要的一诫：要对你讲的课题有兴趣。

（2）假如一个课题你对它并无兴趣，那就不要去教它，因为你将不可能令人满意地去教好它。兴趣是一种必要性，一种不可缺少的必要条件，但是它本身并不是一个充分条件。不管你有多大的兴趣，或什么教学方法或其他等等，都不可能使你向学生讲懂你自己并没有弄清楚的事情。

这就足够说明对教师的第二诫：要懂得你讲的课题。

无论是对课题的兴趣或是知识，这两者对教师都是必不可少的。我之所以把兴趣放在第一位，是因为有了真正的兴趣，就能使你更好地学到必要的知识，反过来，若仅有某些知识但却缺乏兴趣，你必然当不了一个好教师。

（3）当你读到一本关于学习的心理学的好书或是听了关于它的一堂好课，你也许会感到有很大收获。然而读和听并不是绝对必要的，它们也决不是充分的。你应当从自己的经验中——从你自己从事研究的经验及从你对学生的观察中——去懂得学习的途径并且详细地熟悉学习的过程。

把耳闻当作一条原则的依据是不妥的，对原则进行无稽空谈则更糟。

现在，有一条告诉你不能够满足于耳闻与空谈的学习原则：主动学习的原则①，它的中心思想是：学习任何东西的最佳途径就是靠自己去发现。你应当努力去懂得它并真正理解它。

（4）甚至具备了某些真正的知识和兴趣，并且对学习过程也有所了解，你也可以是一个不高明的教师。我承认，这种情况不是常有的，但也不是十分稀罕的。我们中有些人就遇见过这样一位教师，他在其他方面都很胜任，就是不能跟他的班很好地"接触"。为了教与学的正常进行，在教师和学生之间必须要有某种接触和联系。教师应当能够了解学生的情况，他应当能够注意到学生的反映。于是就有下一诫：要观察你的学生的脸色，弄清楚他们的期望和困难，把自己置身于他们之中。

学生对你的教学的反应取决于他们以往的经历，他们的见解与兴趣。因此要把他们知道什么，他们不知道什么，他们想知道什么以及他们不想知道什么，他们应当知道什么以及什么对他们学习来讲是无关紧要的等等这些问题，经常放在心中并加以考虑。

（5）前面提到的四条规则包括了优秀教学的一切要义，它们共同形成了一类充分和必要的条件：假如你对于所讲的课题有兴趣并且具备一定的知识，此外你又能了解学生的情况，知道什么有助于他们学习，什么阻碍着他们学习，那么你就已经是一个好的教师了，或者即将成为一名好教

①见§14.4（1），14.5（1）。去熟悉一下前已讨论过的其它两条原则是有好处的。

师，需要的仅仅只是一些经验了。

剩下需要指出的是前面那些规则引出的一些推论，特别是涉及高中数学教师的那些推论。

学问，部分是由“知识”部分是由“才智”所组成的。才智是技巧，是一种处理知识，运用它为既定目的服务的能力。才智可以描述成为一组适当的思维方式，从根本上讲，才智就是有条不紊地工作的能力。

在数学里，才智就是解决问题，构造证明和批判地去检验解答和证明的能力。而且在数学里，才智比起仅仅具备知识，要重要得多。因此，对于数学教师而言，下面这一诫具有特别的重要性：*不仅要教给学生知识，并且要教给他们才智，思维的方式和有条不紊的工作习惯。*

因为在数学里，才智重于知识，所以在数学课里，你怎样去教也许比你去教什么更显得重要。

（6）先猜，后证——这是大多数的发现之道。你应当懂得这一点（假如可能的话，最好是根据你自己的亲身体验去得到这一点），而且你还应当懂得，数学教师有很好的机会去说明猜测在发现中所起的作用，从而使得学生在脑海中铭刻下一种带根本性的重要思维方式。这后一点虽然是应当知道的，但却并不广为人知，正是因为这个缘故，它应当受到特别的注意。我希望你不要在“*要让他们学习猜测*”这个问题上贻误了你的学生。

无知的不经心的学生常常是“瞎猜”一通。我们必须教会他们的当然不是瞎猜，而是“合理”的猜测。合理的猜测是建立在对归纳论证和类比的适度运用上，并且最终包含着

推理（它在“科学的方法”①中扮演一个角色）的全部步骤。

（7）“数学是一所推理的好学校”。这句话扼要地概括了前面这条规则的本质，但它听起来并不熟悉，很近才有这种提法，我想我应当为它说上几句。

“数学是一所证明推理的好学校”。这句话听起来是熟悉的——它的某些叙述形式可能几乎与数学同样古老。事实上，数学与证明推理是共存的，而仅当证明推理的概念上升到了充分抽象和确定的、数理逻辑的水平，它才渗透到科学的各领域中去。在高中水平上，并没有真正证明推理的机会（比如在日常事务中，它当然是不得其所的）。然而（其理自明），数学教师应当使得除低年级以外的学生都熟悉证明的推理：要让他们学习证明。

（8）在数学这门学问中，才智是更有价值的一部分，它的价值大大超过仅仅具备知识。然而，我们应当怎样去传授才智？学生只能够从模仿和演习中去学到它。

当你介绍一个题目的解时，就应当适当地强调一下解的有教育意义的特征。一个特征，假如它值得去模仿，就是有教育意义的，这就是说，它不仅仅能用于解眼前的问题，并且也可用于解其它的问题——其可用的次数越多，就越有教育意义。所谓去强调有教育意义的特征，不在于赞赏它们（这对有些学生会起到相反的效果）而是在于你的举止（如果你有一点戏剧才能的话，只要加一点动作就很好了）。一个发挥得很好的特征可以把你的解变成为一个模特儿解，变成一

①见15章。

个使人印象深刻的可效法的模型，学生将模仿它去解其它许多的问题。这样，我们就有了如下规则：要找出手边题目中那些对解后来题目有用的特征——即设法去揭示出隐藏在眼前具体情形中的一般模型①。

（9）我想在这里指出一个课堂上的小花招，它易于学到手并且应当为每一教师所了解。在你开始讨论一个题目之前，先让你的学生猜猜解答。那些想出了一个猜测或甚至已把猜测说出口的学生一定会变得很专心，他的心一定会跟住解题的进展以便弄确实他的猜测是对的还是错的——这样他就不可能分散精神了②。

这仅仅是下述规则的一个极为特殊的情形，而这条规则本身已包括在规则3和6的某些部分中了。这条规则是：不要立即吐露你的全部秘密——让学生在你说出来之前先去猜——尽量让他们自己去找出来。

实际上，此条规则因伏尔泰而得名，他把它说得更有风趣："令人讨厌的艺术就是把什么都说了出来。"

（10）一个学生作了一个长计算，写了好几行。一看末行结果，便知道计算是错的，但我却抑住不说。我喜欢与学生一起，一行接一行地查看："你一开头做得很对。你的第一行是对的，你的第二行也是对的，你做了这个那个。现在关于这一行，你是怎么想的？"假如错是由学生自己发现的，他就可以学到点什么。假如，我当时立即就说："这是错的"，这学生也许会产生反感，这样我下面的话他就都听

①你想了解得更详细吗？请读全书。

②参考§14.5（2）。

不进去了。假如我经常这么说"这是错的"，这个学生将会恨我及恨数学，这样就他个人来讲，我的一切努力都将付诸东流。

亲爱的教师，请不要说"你是错的。"假如可能，就换一句话"你是对的，但是…"。倘若你是这样做了，并不显得你是虚情假意，而是显出你的诚恳。你应该这样去做，这已经隐含在规则3之中了。不过现在我们把这个忠告表示得更明白些：要建议，不要强迫别人去接受。

我们的最后两条规则，目标是一样的，它们共同提示的，就是在有教师教的条件下，尽可能让学生发挥自主和主动精神的机会。迫于时间限制，数学教师常常会违背这些规则的精神，即主动学习的原则。他也许赶着解题，并不留出足够时间让学生们自己去认真地思考一下问题。他也许在没有充分的材料准备的基础上，在学生们还没有感到有什么必要的情况下，就很快地提出了一个概念或形成了一条规则。他也许会犯"救星从天而降"的毛病：引入某些妙法（比如，在几何证明中引入一条奇妙的辅助线）使得结果突然推出，但学生们却要了命也想不出怎么能够发现这样一个从天上降下来的绝招。

违背这原则的因素太多了，因此让我们再强调几句：

让你的学生提问题；要不就象他们自己提问的那样由你去提出这些问题；

让你的学生给出解答，要不就象他们自己给出的那样由你去给出解答。

无论如何，不要去解答没有人问过的、甚至连你自己也没有问过的问题。

第十四章的习题与评注

第一部分

14.1　已知旧金山的经度为西经122°25′41″，回答§14.61中的提问（d）。

14.2　依照§14.6(8)中的提示，应用立体几何证明图14.3中所示的命题。

14.3（续）用平面几何去证明所示的命题。

14.4　在§14.6(9)中提到了前已论述过的某些要点，这些要点亦在§14.6（3）到§14.6（8）的题目中被描述过，你留意到更多这样的要点么？

第二部分

14.5　为什么要教解题？我认为教"解题"应是各种各样课程的一种不可缺少的组成部分，尽管这些课程在别的方面可以各不相同。因此它也应该是高中数学课程的一个不可缺少的组成部分。这个意见贯穿于本书及我的有关著作中，并且已经在前面（见序言第5段和§14.2）明确地谈到过了。假如读者在读了前面各章后仍不相信这个意见有多大价值，那末我对他也就无能为力了。这里，我还想再说一点关于解题在高中课程中的作用和地位问题。

（1）我们这里谈的是高中数学的教学以及这种教学的目标问题。严肃的和现实的目标应该是考虑到学生以后能够运用他们将要去学的东西。当然，学生中有着不同类别，有些能够较多地运用在学校学到的知识，而其他一些则也许运用得较少。有些类学生在学生总数中占着较大的比例，而其他一些则占得较小。关于这方面可靠的统计数字将是很需要的，但它们几乎没有采用。我下面用的一些比例数字只是粗略的估计，并没有严格的统计基础——我使用这些数字，无非也只是为了谈起来具体些。

（2）我们来考虑一下学习高中水平的数学（代数，几何等等）的那些学生。依照他们在未来各自的职业中应用所学数学的情况，让我们姑且把他们分成如下三类：数学家，用到数学的人，不用数学的人。

我们把第一类人的界线划得广泛一些，即把理论物理学家，天文学家及某些专门研究领域里的工程师也算成为“数学家”或“数学的生产者”。所有这些人也许占学生中的1％（未来的数学哲学博士的数字接近于0.1％）。

工程师，科学家（也包括一些社会科学家），数学教师，科学教师等等是数学的应用者（一般说来，不是数学的生产者）。我们也把那些在他们以后的工作中并不用到数学，但是在他们的学习阶段却需要一些数学（比如许多工科毕业生以后成了售货员或经理）的学生也算作为数学的应用者。所有各类数学的应用者的总数，比如说，占了学生总数的29％。

余下的学生中有许多人能够运用（但实际上并没有运用）超过他们小学所学的数学。把这部分不应用数学的人估计成

占学生的70%虽然是粗略的，但不能说是不现实的。几乎所有未来的实业家、律师、牧师等，均属于此类。

（3）我们无法预知谁以后会干什么，我们也无从知道哪些学生归属于哪一类。因此据此情况，我觉得数学班应当办得符合于两个“原则”：

第一，每一个学生应当能够从他的学习中得到某些收获而不管他以后的职业是什么。

第二，那些在数学上表现出有一些资质的学生应当受到鼓励和吸引，而不要由于拙劣的教育而使他们嫌弃了数学。

我想读者同意这两条原则是不言而喻的，至少在某种程度上是这样。实际上，我认为一个人在安排课程的时候，如果不是一直不断地真正地关注到了这两条原则，那他就是不切实际的和不负责任的。

让我这里再提一下这里所考虑的三种类别的学生〔见（2）〕，怎样能够从解题中获得他们应得的东西。

（4）解数学题的能力，当然，依赖于某些有关的数学的专题知识，除此而外，它还有赖于某种有益的思维习惯，某种一般性的我们在日常生活中称之为“常识”的东西。一个教师，他若要同样地去教他所有的学生——未来用数学和不用数学的人，那么他在教解题时应当教三分之一的数学和三分之二的常识。对学生灌注有益的思维习惯和常识也许不是一件太容易的事，一个数学教师假如他在这方面取得了成绩，那么他就真正为他的学生们（无论他们以后是做什么工作的）做了好事。能为那些70%的在以后生活中不用科技数学的学生做好事当然是一件最有意义的事情。

这29%的以后将成为数学应用者的学生，为了给接下去

的学习作准备，需要一些技术上的训练（比如代数运算的技巧）。然而正是那些讲究实际的学生，不愿意去学习抽象的专门的东西，除非他们相信，这些东西是为什么目标服务的，对什么东西是有用处的。教师在向学生说明为什么要教这些东西时，他最好能够表明这些东西在解决实际中提出来的有兴趣的具体问题时，是十分有效的。

未来的数学家仅占学生整体的1%，将他们发掘出来是一件最重要的事情。假如他们选择了一项错误的职业，那末他们的才能（现代社会很多方面会需要他们）将遭到浪费。高中教师对这1%能做到的最重要的事就是唤起他们数学上的兴趣。（多教或少教他们一点高中里的专题知识是无关紧要的，因为这只不过占他们最终必须要学习的知识中的一个无穷小的比例）。现在，解题便是通向数学的一条最重要的道路；它并不是唯一的道路，但它跟其它那些重要的道路是联系着的（见习题14.6）。此外，教师也应当去处理少量的虽然多少有点难并且要花费时间但却真正具备了数学的美和有一定背景的题目（见15章）。

（5）我希望，正如我前面已经说过的，有关在高中里教解题的问题的论述，读者能够在本书的每一部分和我有关的著作中找到。某些特殊方面将在下面再着重谈一谈。

14.6解题和理论的表述。一个专心的认真备课的教师能够拿一个有意义的但又不太复杂的题目，去帮助学生发掘问题的各个方面，使得通过这道题，就好象通过一道门户，把学生引入一个完整的理论领域。比如，证明$\sqrt{2}$是一个无理数，或者证明有无限多个素数就是这一类有意义的题目。前

者可以成为一道通向精密的实数概念①的门户，而后者则是通向数论②的门户。

教师这样作的过程与历史上科学的发展是一致的。一个有意义的问题的解决，化在解上面的努力和由问题的解而得到的见解，可以打开通向一门新的科学、或甚至于一个科学的新纪元的门户，这里我们不禁想起了伽里略和他的落体问题，以及开普勒和火星轨道问题。

*M.Wagenschein*在上面所引的著作里，提出了一个想法，我认为它应当得到所有课程安排者的注意。这个想法是：教师与其去穷于应付过分扩充了的大纲的各个细节，不如集中力量于某几个真正有意义的问题，并且从容不迫而彻底地讨论它们。学生们可以在他们水平所许可的范围之内去涉猎问题的各个方面，他们可以自己去发现问题的解，他们可以在教师的指导下，预测解的某些结果。照此办理，一个问题就可以变成科学的整个这一章中的一个范例和样板。这是关于示范教学思想的第一次概述，每一个与课程密切相关的教师应当读一读上面所引的书中关于这方面的内容，也可参考习题14.11。

让我们注意到单个问题的适当处理可以成为通向科学的一个分支的门户，或者成为它的一个范例。有鉴于此再加上

---

①参阅A.I.Wittenberg, Bildung und Mathematik(klett Verlag 1963) pp.168—253。

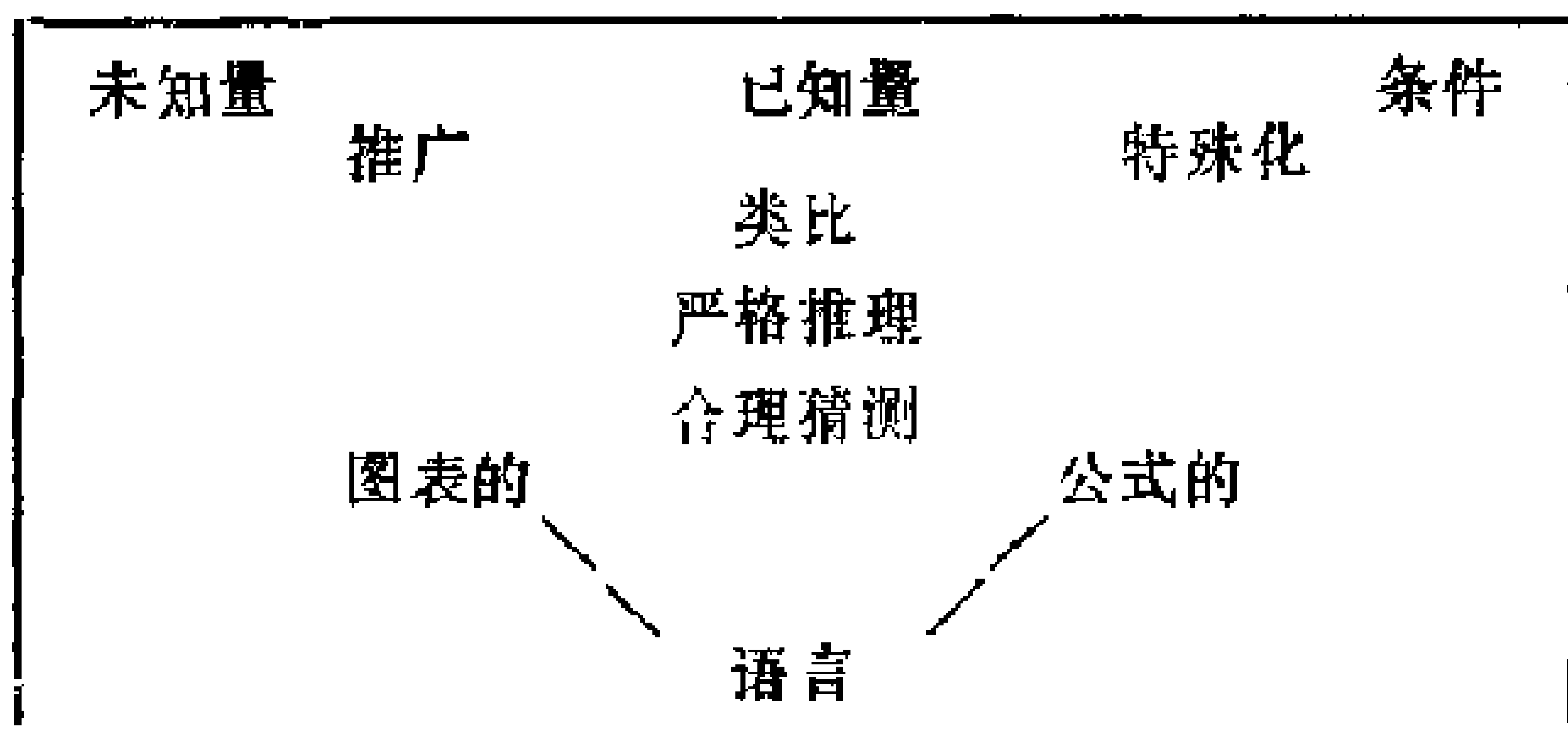
②参阅Martin Wagenschein,Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht, Der Mathematikunterricht, vol.8, 1962, part 4, pp.29—38.

类似的观察，使我在§14.2中不揣冒昧地说，思考也许就是解题，至少在一次逼近之内是这样。

14.7 解题与一般文化修养。许多人认为(我也是这许多人中的一个)高中教育的主要任务，就是向学生传授一般文化修养。让我们不要在这里纠缠"一般文化修养"的定义，否则我们就可能在"正确"的定义上争个没完没了。

我在数学班里教解题的过程中，得到了发展某些概念和思维习惯的极好机会，而这些方面，我认为是一般文化修养中的重要组成部分。本页的方框里列出了一张表①，这张表当然不可能列出所有东西，它仅仅包括那些最明显、最为人熟知的若干内容。我想它并没有超出高中班级平均水平所能及的范围。表中所列的大多数条目已在本书或在我的有关著作②中详尽地解释过了。另外一些补充的说明见习题14.8和14.10。

关于一般文化修养与数学教学之间的关系这个重要问题上的一个观点，可参阅参考文献[9]*Wittenberg*的著作。



①摘自美国数学月刊，vol. 65，1958，p.103。

②关于"式的语言"见第二章，关于"合理猜测"见第十五章。

14.8 图的语言。有一些人总想把他们的想法用某种几何符号表现出来。在他们的脑子里，我们大家惯用的某些说话姿势也有了发展成为几何图形的趋势。每当他们在想着他们的问题时，他们往往要找一张纸和一支铅笔信手涂画一番：他们也许正在用几何图形的语言把自己表达出来。

（1）有许多非几何的事实和想法，可以非常合适地用几何图形、图式和图表表现出来。音符就是把点记在高低不同的谱线上去表示音调的高低，化学符号法就是借助于几何符号（点及连接它们的笔划）去表现化合物的构造。数以及数的关系可以用各种各样借助于几何对象和几何关系的方式去表现。解析几何提供了将数量关系与几何关系互相转换的系统的手段。解析几何有点象是两种语言的辞典，即公式的语言和几何图形的语言的辞典，它使得我们很容易地将一种语言转化成另一种语言。解析几何的思想是应用于科学、工程、经济等各方面名目繁多的图式、图表、诺模图等等的基础。图表在纯数学中同样是有用的，有一些在高中水平上即可得到很好的解释，习题14.9，就是它的一种不能在平常教本中找到的描述。

（2）在科学中应用图式和图表从原理上讲常常是确定的和精确的，（理想化的）几何图形恰好地表示了意想中的数量关系。然面那些或多或少有些含混或不确切的图式表示也仍然是可以有用的，注意到这一点也是重要的。例如，我相信图11.2还是有些启发价值的，尽管它只不过是将口上说的图转化为看得见的图，它几乎不比纸上写的比喻多出任何东西。图15.1到15.5就有很清楚的数学含义，它们表示了所有三角形形状的集合和这个集的某些子集合。然而它们主要

的兴趣却在于它们启示了更多的一些东西，启示了一个我们还没有想象得很清楚的步骤，一个归纳论述的进展。

在看来是类似的两个图表中，其一可以用完全确定的数学意义来说明，另一则是在有点模糊的譬喻的含义下去理解。而在严格的精确性与诗意的引喻之间的所有过程都是可能的。用于很多目的的框图，就能够很好地描绘这一点。

（3）几何，我们关于空间的知识，具有若干个方面。如我们所知，几何可以看成是建立在公理基础上的科学，然而几何也是一种眼和手的技能。此外，几何还可以看成是物理学的一个部分（有些物理学家说它是最原始的部分——而有些几何学家说它是最令人感兴趣的部分）。作为物理学的一个部分，几何学也是一个领域，在那里我们可以从事直观的或归纳的发现，并且随后运用推理去加以证明。前面的讨论则在这些方面又加上了一点：几何也是一类语言符号的来源，这类语言可以是通俗的或是精确的，但它们都是有帮助的和有启发性的。

有一条教训可供教师们参考：假如你想教好你的学生而不是穷于应付上面规定下来的课程项目，那就不要忽视这些方面中的任一方面。特别地，不要过早地或过多地去大谈几何的公理方面，假如你不想在你学生中去惹起未来的工程师和科学家们（或未来的艺术家和哲学家们）的厌烦的话。这些学生往往更喜欢用几何形状的直观知识，用空间形象，用归纳发现，或者用图表帮助思考。

14.9 有理数和无理数。下面所谈的只是我们在课堂里应该非常注意地去做的一个快速的概括——这里我们面临的也许是高中数学课程中最美妙之处了。为了简明起见，我只用

解析几何的很少的几个辞和符号，它们实际上只需要非常少的一点（仅仅是一点"作图"的）知识就行了。

如平常所见，令x，y表示直角坐标，以方程为$y=1$的直线代表数直线（一条"漂亮的码尺"）。在图14.5中，还列出了格子点，即坐标为整数的那些点。图中强调了沿着数直线的那些格子点（"沿着一条直长马路的里程标"）。

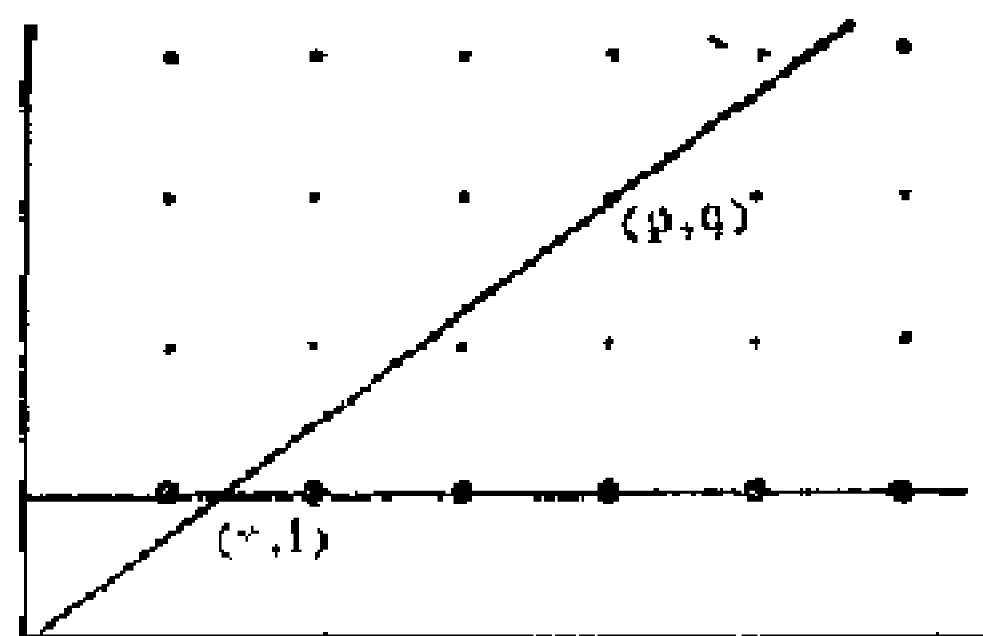


图14.5　数直线和格点

在图14.5中，数x在数直线上用点（x，1）来表示。我们画出通过点（x，1）和原点（o，o）的直线。由相似三角形原理，即知这条直线通过格点（p，q）（不等于原点！）的充分必要条件是x为有理数

$$\frac{x}{1}=\frac{p}{q}$$

教师应当提出以下的问题（但不作答复，至少在相当一段时间内不作答复）：

原点是一个格点。是否每一条通过原点的直线必定经过另一个格点？

当然，仅仅有两种情况：一条过原点的直线或者经过，或者不经过另一格点；哪一种情形看上去更可能？

假如教师开始讨论$\sqrt{2}$的无理性，或无理数的有理逼近（这时按克莱茵*的方法，图14.5可以用来通向连分数的门户）等，那么他应当让上面的提问和图14.5"埋伏"起来，直到学生们了解了它们的意义与重要性（也许在几小时，几星期或几个月以后）为止。

14.10 *严格推理*。我们应当在高中里教数学证明吗？有这么一种回答：是的，我们应当教，除非出现极其不利的条件迫使我们降低标准。我对于这种说法是持怀疑态度的。严格的证明是数学的标志，这是数学对于一般文化修养所提供的不可缺少的素养。一个学生若对数学证明从未留下印象，那他就缺少了一种基本的思维经历。

我们应当按照怎样的严格程度去教数学证明，以及怎样去教？这个问题的回答并不是很简单的，它事实上牵涉到很多困难。倘若无视于这些困难，不经过深思熟虑，仅仅按着传统、时兴或成见去作出某种答复，这是为诚实的课程规划者所不取的。

有着各种各样的证明以及各种各样的证明方法。我们首先必须懂得对于一定年龄范围与成熟程度的人来说，常常是某些证明方法比起另一些证明方法来，更适宜于去教。

（1）笛卡儿注意到并且很其明确地描述了关于数学证明的某种见解。我这里引述他的思维的法则的第三条①：

---

* 克莱茵（Felix Klein 1849—1925）德国数学家。

①Oeuvres, vol.X, p.366.

"关于我们研究的对象，我们不应该去寻求别人的意见或者我们自己的猜测，而仅仅去寻求清楚而明显的直觉所能看到的东西，以及根据确实的资料作出的判断，舍此而外别无其它求知之道。"在说明这个法则时，笛卡儿依次考虑了"两种求知之道"，直觉和推断。这里引的是他关于推断讨论开始的一段话①："直觉的证实和确信不仅在命题中是要求的，而且在各类推理中也如此。例如我们想去推断2加2等于3加1，那末我们必须直觉地看到不仅2加2得4和3加1得4，并且也应当看到由这两个命题出发，上面提到的第三个命题也就必然导出。"

一个数学的推导，在笛卡儿看来就象一条结论的链，一列相继的步骤序列。有效的推导所需要的是在每一步上直觉的洞察力，它显示了在那一步所得到的结论明显地来自前面已得的知识。(直接靠直觉，或间接靠前面的推导步骤得到。)

(我们从前面第七章中认识到，一个带有分枝的图式比一个简单的不带分枝的链更适宜于表现一个证明的结构。然而这并不是主要的：假如笛卡儿也知道我们在第七章里研究的图式表示，他一定会坚持图式中的每一个元素——例如由图7.8所示的——都必须得有直觉的证实来支持。)

(2) 数学的几种见解。数学也可以看成为一种按照任意确定的规则进行的符号游戏，在这个游戏里主要的原则是不要离开规则。(这样一种见解是十分近代的；五十年以前

①Oeuvres, vol.X, p.369.

大多数的数学家和大多数的物理学家会认为这样一种对数学的见解是乱束、然而，这种在伟大数学家希尔伯特*影响下而出现的见解，对于数学基础的某些研究是非常适宜的。）

在这个符号游戏里，这些符号是没有具体含义的（即使它们有我们也将忽略掉）。在这个游戏里有"证明"。所谓证明里的一步就是写下一个"组织得很好"的新式子（遵照着规则的一些符号的组合）。假如这个新的式子是严格地按照开始时引入的某些公式（"公理"），按照前面各步所写下的式子，以及某些在证明开始时定下的推导规则而写下的，那末这一步就认为是正确有效的。在这样做的时候，无论是证明还是被证明的命题都必须"原子化"，分解成非常小的步子和微小的成分。

（3）在（1）和（2）中考虑过的这两种极端的见解之间，还有其他的见解①。事实上，关于数学证明的概念是在发展的，随着科学世纪的转变而变化。这种进化以及导致这种进化的动机的研究，也许对我们数学教师来说该是大有兴趣的。当我们了解了人类是怎样逐步去认识一个概念的，我们也就能够更好地看清孩子们将是如何去认识它的。参阅习题14.13。

一个进行创作的数学家，当然他可以自由地倾向于这些见解中的任一种，他常常倾向于最有利于他的工作的那种见

---

* 希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）德国数学家。

①关于证明性质一个写得很好的研究，见Lakatos（引在文献目录里〔10〕）。

解。然而在高中的水平上，我们的选择却并不是自由的，倘使选择是在（1）和（2）之间（在教接近于一种观点或接近于另一种观点的证明之间），我们很难能有犹豫的余地。

我想每一个人，包括职业数学家，会觉得直觉的洞察比形式逻辑的论述来得好。我们时代杰出的法国数学家阿达玛（*J.Hadamard*）这样说①："数学严格性的目的是要使得直觉所得到的东西获得承认并取得合法地位，而从来没有任何其它的目的。"于是，假如我们排除掉职业数学家，那就几乎没有真正欣赏形式论述的人了。直觉是"自然地"来到的，而形式论述则不是②。不管怎么说，直觉比起形式论述来更容易得到，更不受外面的影响。而对于形式论述，除非我们在逻辑的训练与论述上达到了相当高的水平，我们事实上是很难真正理解它的。

因此，我认为在给高中的年青人上课时，相对于推理来讲，我们更应当侧重于直觉的洞察，并且当我们在讲证明时，与其去接近某些近代逻辑的想法〔见（2）〕，不如更应当去接近笛卡儿的想法〔见（1）〕。

我曾经接触过一些年青人，他们对于工程和科学有一定的兴趣，大概也有一些才干，但是却不愿学数学。我总有一种预感，觉得这种拒绝来自某个地方。

（4）让我举一个例子。考虑下述命题：在一条直线上

---

①EmiLe Borel, Lecons sur la theorie des fonctions。3rd.ed.1928, p 175。

②作为一句附带的话，表达了一个非常类似的意见，见H.Weyl, Philosophy of Mathematics and natural science, p.19。

的三个点中间，恰有一点处于其它两点之间。

注意这个命题提到了直线性质的某些本质之处。假如三点是在圆周上，则没有一个点会是特殊的，没有一个点可以根据“相间性”与其他点区别开来。

关于直线上三点的如上的命题需要一个证明吗？在大学里几何基础课的讲授里，从公理出发给出这个命题的一个证明也许是必不可少的。然而对于刚刚开始学习几何学理论的十年级高中学生，去讲这样一个证明，却是颇为荒唐。

这就是我的意见，也许不一定对。为了有一个辩护意见你必须描写一下班里对这样一个证明的反应。我想象它是这样的：大多数的年青人将明显地显得厌烦。少数中等或中等以下的人则多少感觉到证明是多余的和无目的的。也许班里面会出现一、二个男孩子直率地表示出反感甚至造反。不管怎么说，我想当我是在高中时期，假若那个证明是对我讲的，那么我就会有那样的反应。我并不装作我确切地记得六十年前我还是少年时的想法，我当然也不装作那个少年什么都对。但我还是能够清楚地想象出我对这样一个证明的反应：它会使我感到我的教师是糊涂的——或者数学本身是糊涂的，或两者都是糊涂的。那时，我会不再去听教师的解释——或者若不得不听，我也会带着反感、怀疑与轻蔑去听。

总而言之，我认为对一个如上概述性质的证明所引起的不好的反应，是一件自然的、理当发生的事情。

（5）有许多关于证明的见解。我想证明在建树科学中所起的作用比平常所想象的要复杂得多，这也许是一个哲学上应当探讨的问题。然而我们这里考虑的是另一个问题：给初学者去讲的应当是哪一种见解的证明？这个问题对我来说

似乎不难回答，我在这方面有一个坚定的看法，现在就大胆地把它提出来。

首先，必须使初学者相信证明是应当去研究的，它们是有目的的，并且是有兴趣的。

在法庭上，证明是有目的的。被告被怀疑有罪，但这不过是怀疑，是一个疑问。必须证明他或是有罪或是无罪。一个法律上的证明的目的就是消除怀疑，而这也正是一个数学证明的最显然和最自然的目的。我们对一个清楚叙述的数学论断抱有怀疑，不知道它是对的，还是错的。于是我们就有了一个课题：去消除怀疑。我们应该或是证明这个论断，或是否定它。

现在我就能够解释，为什么我是那么坚定地确信上面提到的证明（关于在一条直线上的三点）越出了高中的界线。一个高中年龄的年青人当他知道了关于三点的论断后很难对它产生怀疑。并没有什么怀疑需要去消除，因此证明就显得无用，无目的，无意义。假如这个证明是从公理出发的，区分好几种情形，在课本里还画出十三条直线，那末情况就更加不妙了。这也许会给年青人一个印象，似乎数学就是用最不明显的方法去证明最明显的事情。

（6）然而，我已经谈到过，这个关于一条直线上三点的证明在适当的水平上则是非常可行的。但当我们把它拿到高中去教，那就会犯丢丑的、可笑的混淆水平的教育学的错误。见习题4.15。

在研究的水平上，可能发生这样的事，一个命题在直觉上十分显然，我们对它有有力的论说，但是却没有形式论证。在这种情况下数学家就可以尽其所能去发现一个证明。

作为高中水平上这样一种情形的预演，见习题14.11，更多的例子见15章。

（7）在结束这个题目以前，我必须对另一种严重的教育学上的错误——过分着重于浅近的证明敲一下警钟：用那些缺乏推动力、得不到什么收获的乏味的证明充塞着教本的每一页，会给最好的学生（他们对于工程、科学或数学具有某些也许是极其可贵的直觉上的天赋）带来极坏的印象。

这个丢丑的错误也许也是源于混淆了水平。对于一个职业数学家(不是对于一个高中年龄的孩子)来讲，去检验一个长的论证中的每一步的形式证明也许是必要的，虽然它不是数学家的工作中最令人愉快的部分。逻辑就象站在超级市场出口处的女士，她核查着装在一个大篮子里并不是她收集的每一件东西的价格。

14.11 一张地图可以是完美的吗？所谓一张地图就是将地球表面的一部分表示在一叶平纸上。

（1）为了了解摆在我们面前的问题，我们需要先把事情推广，去精确地描述一下更一般的情况。（这个从特殊到一般和从比较直观到比较抽象的水平的转化是重要的。这里我们作得有点突然，但在课堂里这就要逐步地仔细地去做）。

我们考虑从一个曲面S到另一个曲面S'的映射。这里考虑的是一对一的映射，也就是说，假设对于S上的每一个点p，仅仅恰有S'上的一个点p'（p的像）与之对应，反过来，对每一个S'的点p'，也仅仅恰有S上的一个点p（p'的原像）与之对应。我们再一进步假设这映射是“连续的”：即在一个曲面上的一条“光滑”线段上的点对应到另一曲面上的点

集也组成一条光滑线段。令L_1和L_2是S上相交于p点的两条线段，它们在p点的夹角是α。令L'_1和L'_2分别是L_1和L_2的像，则L'_1和L'_2必相交于p点的像p'，并设它们在p'点的夹角为α'，我们把α'视为α的像，α视为α'的原像。

(地理映射，即地图，是曲面映射的一种特例。这时S是地球表面的一部分，而S'是纸平面上对应部分。让我们想象地球表面上一些重要的线——海岸线，河流，边界线，公路，铁路线——它们在地图上就用对应的线来表示。)

(2) 现在我们需要给出一个清晰的定义。假如一个映射满足下面两个条件，则我们称它是完美的：

(Ⅰ) 所有的线段按同样的比例伸缩，

(Ⅱ) 所有的交角不变。

让我们把这两个条件重新说得更详细一点。

(Ⅰ) 对于一个映射，有一个从属于它的确定的"比率"或一个固定的比例数(比如1:1000000)，其含义如下：假如S'上的线段L'是S上线段L的像，那末L'的长度和L的长度比就等于一个固定的数(在我们的例子里为1:1000000)，这个比数与线段的形状、大小及分布位置无关。

(Ⅱ) S'上的像角α'等于S上的角α。

(3) 让我们形象地谈一谈前面的定义，更具体地考察一下它所含的内容：

(3a) 上面提到细心制作出来的地图的比例是1:1000000，这是说它是一个近似的比例——但是在整个地图上能够严格地保持着同一比例吗？还有，假如这点可以作到，那末地图还能保持角度不变吗？这是一个疑问。

（3b）假定按照任何固定的比例将曲面S映射到曲面S'上在几何上是可能的，那么显然，将一个几何上相似于S的曲面按比例1:1映射到S'（即没有缩小和放大）也是可能的。例如，让我们假定我们所居住的行星是一个真正的球面，假若地球表面上的任何一部分能够按1:1000000的比例完美地映射到平纸的一叶上，那么一个直径为地球直径百万分之一的一个球面的对应部分也必然可映射到同一叶上，使得对应的线段（即原线段和像线段）处处保持有同样的长度，并且所对应的角也是相等的。

（3c）我们可以将一个纸片卷成柱或锥的形状，反过来，我们也可以将一个柱或一个锥的弯曲的侧面展平为一叶平面。这样一个展平工作就产生了一个从弯曲的柱或锥的表面到一个平面的完美的映射（海岸线和河流的像顺着纸上痕迹）：长度和角度显然都保持不变。

然而我们能不能类似地将一部分球面展到平面上去，而保持所有的长度和角度不变呢？我十分怀疑，觉得这是不可能的。而这个怀疑也许是基于经验，基于我们在削苹果或土豆皮时的观察。

（4）现在我们可以看到我们这个问题的核心了。将一个球面上的一部分，在点与点的一一对应之下，映射到一叶平面上，并且保持所有的长度和角度不变，这是可能的吗？

我们假设（违反我们的经验）这样一种映射是可能的，并且把由这一假设出发所得出的推论描写在下面的（5）和（6）中。

（5）长度是保持的。令p和q是S上（球面上）不同的

两个点，L是S上任何一条连接p和q的线段；再令p' q'和L'分别表示在S'上（平面上）p、q和L的像。由假设，L和L'等长。倘若L碰巧是球面上的短程线(即它的长度小于任何其它连接p和q的线段的长度），那末，因为长度是保持不变的，L'在平面上也必然要短于任何连接p'和q的线段，也即它是平面上的最短连线。我们知道（读者应当知道）平面上的最短连线是直线，而在球面上的最短连线是大圆弧。由此可得结论：球面S上的大圆弧必映射成平面区域S'上的直线线段特别地，由大圆弧所组成的球面三角形的各边必映成平面上由直线段组成的平常三角形的各边。

（6）角度是保持的。因此刚才提到的球面三角形的每一个角必等于平常三角形中对应的角。然而这是不可能的，因为平常三角形三内角之和等于180°；但是，读者应该知道，球面三角形三个内角之和却是大于180°的。

于是，从球面到平面的完美映射是不可能的。

（7）我们刚才解决的问题，既可以通向实际应用（制作地图），也可以通向一个大的理论（以高斯的“绝妙的定理”为中心的微分几何的一章*，进而通向广义相对论）。除此以外，下面再谈几点，它们并不离高中水平太远并且与刚讨论过的部分有紧密的联系。

（7 a）若一个平面三角形的每一边和一个球面三角形的对应边的长度都相等，证明在这一情况下[在（5）和(6)中考虑过]球面三角形的每一角大于平面三角形中的对应角[第一个三角形的内角和大于第二个三角形的内角和是（6）

* 指微分几何的曲面的内蕴几何一章。

中关键的一句话。

(7b) 在(2)中叙述的两个条件并不是无关的：(Ⅰ)蕴含着(Ⅱ)，也即若(Ⅰ)满足，则(Ⅱ)也必定满足。

(7c) 然而(Ⅱ)并不蕴含(Ⅰ)。存在着许多从球面到平面上的保角的映射，但是在这一映射下球面上一条曲线的长与平面上对应的像曲线的长的比数却不是常数[根据在(5)和(6)中证明的定理，它不可能是常数]。

(7d) 存在着球面到平面的许多映射，它们保持所有的面积不变（但是并不保持角度）。

(7e) 存在着球面到平面的许多映射，它们保持最短线，也即它们把大圆圆弧映射为直线段（但它们并不保持角度）。

(8) 我想在上面的讨论中，若要去弄明确连续性的作用并补充这方面精确的细节，那就超出高中水平太远了。

14.12 我们应该教什么？你作为一个教师，受到社会的委托去教你的班里的年青人，因此你的任务就是去教那些有利于社会以及有利于你的班里年青人的东西。

你认为这种话没有什么大不了。然而它也许比你所想的要重要得多。在你的短期规划及长期规划中，在计划下一期班的工作以及计划课程的时候，要真正把你的任务记在心中。想象在你的班里有一个漂亮伶俐的男孩，还没有学坏，也不懂得怕人，他常常会诚挚而天真地问你："老师，那有什么用？"假如你在努力想象那个逗人喜欢的孩子的脑子里在想什么，并且计划你的教学使得你能够很好地回答他那挑眼的提问——或者是使得你能很好地对付他那贪玩和淘气，根本

没有机会去问那种挑眼的问题——这样的话，你也许就会成为一个更好的教师。

我承认教师的任务要受到各种因素的干扰。举例说，我们也许会只去教易于讲懂的东西，"好教的"东西。然而我们就应该只教好教的东西吗？好教的总是有利的吗？

一个聪敏的驯兽者可以把一头海豹训练得能用鼻子去顶住一个球。但是这项技术会帮助海豹去抓更多的鱼吗？

14.13 *发生学的原理*。去规划所列的课程要比去选择该教什么内容和什么理论更显得复杂，我们必须要预先了解哪些内容和理论应当放在什么次序上和用什么方法去教。"发生学原理"在这方面提供了重要的启示。

(1)教学的发生学原理可以用各种方式来叙述。例如：在教一个科学的分支（或一个理论，一个概念）时，我们应当让孩子重蹈人类思维发展中的那些关键性步子。当然，我们不应当让他重蹈过去的无数个错误，而仅仅是重蹈关键性的步子。

这个原理并没有规定一个严格和可靠的法则，相反地，它却留给我们许多选择的自由。什么样的步子是关键性的，什么样的错误是可以忽视的，这都是须要解释的事情。发生学原理只是指导我们去判断而不能代替判断。

为了侧重说明这一点，更加谨慎地（和更含糊地）去复述一下这个原理也许是有好处的：在了解了人类是如何获得某些事实或概念的过程之后，我们就能更好地去判断我们的孩子应当怎样去学习这些知识〔在习题14.10（3）中我们非常接近于这一叙述〕。

(2)发生学原理得到了生物学类比的支持。个体的动物

的发展重蹈了这个动物所属种类的进化的历史。那就是说，动物的胚胎，当它经过从受精细胞到它的成熟形体的发展过程中依次的各个阶段时，它的每一个阶段都很类似于它所属类的祖先，而它的各个发展阶段的次序正反映了它的祖先的发展次序。假如我们对于"个体动物的发展"说成为"个体发生学"（"胎生学"），对于"动物种类的进化历史"说成为"系统发育学"，那末我们就得到了法国生物学家汉刻尔（*E.Haeckel*）给出的"生物发生学基本定律"的简明形式："个体发生学扼要重演了系统发育学。"

这些类比，当然仅仅是一些有趣的启示的来源而并不是教学发生学原理的一个证明。而这个原理本身，不应当被认为是一个"既定的必须遵守的原理"，而仅仅是一个有趣的启发的来源。

（3）于是，发生学原理就可以启示我们已经在§14.4（3）和§14.5（3）中讨论过的阶段序进原理。事实上，在科学的（理论的、概念的）各个分支的历史发展过程中，我们可以区分出三个阶段，在初始的探索阶段中，第一次有启发性的，但常常不完全或错误的想法在同经验到的事物接触中产生出来了。在下一个表述阶段中，所接触的材料进行了整理，引进了适当的术语并且认识到了规律性。在最后的同化阶段中，规律性则在更广的范围内被认识，并且得到了推广和应用。

然而只有阅读了伟大作者的原著，才真正使我们确信教学的发生学原理。这种阅读犹如在教科书沉闷的空气中呆了很久之后出来到新鲜空气中作一次愉快的散步。就象麦克斯

韦* 在他的大著《电磁学通论》(*Treatise on Electricity and Magnetism*)的序言中所说的："对于在任何科学领域中的学生来说，阅读一下该领域中的原著是大有好处的，因为科学当它处在初期阶段时，总是最容易完全贯通的。"

(4)根据发生学原理，学生应当重蹈原来发现者走过的途径。根据主动学习原理，学生应当尽量地做到自己去发现。这两个原理结合起来，就告诉我们学生应当去重新发现他必须去学的东西——这里我们首次瞥见了教学过程的一个重要的方面，关于这方面读者可以去参阅文献目录中引的*A.Wittenberg*的两本书。

14.14 空口侈谈。"文化修养"是一句时行的话，作为一句时行话，它也很易于被滥用。人们很易于去空谈"文化修养"。在学校里，最坏的事情也可能在"文化修养"的借口下去做出来。

"文化修养"，"教会思考"，"教会解题"这些时行话尽管本身有很好的含义，但是都可能被误解和乱用。然而对于"教会解题"这句话却有一点差别。

"教会解题"不仅仅可以用其他一般的辞（同样易于误解）去解释，而且也可以借助于提出具体例题去说明（本书及我的有关著作就是想介绍许多这方面的例题）。

因此，空口侈谈解题就很容易被揭穿了："好，你在教解题——很感兴趣。你想给班里讲的是些什么题呢？通过这些题你想去阐发什么样的思考方法呢？"

---

* 麦克斯韦（J·C·Maxwell），1831—1879，英国物理学家，经典电磁理论的奠基者。

14.15 混淆水平。“近代数学家们主要是用集合、运算、群、域等去工作，而很少用老式的几何与代数。因此我们应当在这些老式科目之前先教集合、运算、群和域。”

这是一种意见。下面是一种类似的意见。

“现代的美国人更多的是驾驶汽车代替步行，因此我们在婴孩学会走步之前应当先教他们开车。”

14.16 伊莎朵拉·邓肯*是一名著名舞蹈家。当我还年青时她就象近年的玛丽亚·门罗一样驰名。

这位女士和我们的题目有什么关联？您瞧，有一种妙的想法，就是搞一个班子去规划课程并编写教科书，这个班子由大学的教授和高中的教师组成。我们可以预期，这将会得到一个把教授非凡的数学见解与高中教师处理高中班级的经验结合起来的了不起的产物。是的，是的，但……

当我还年青时，每个人都知道关于伊莎朵拉·邓肯的一些轶事。比如她提出要同肖伯纳**结婚一类的事：“……请考虑我们会得到一个孩子，他会具有你的聪明的头脑和我的美丽的容貌”。“是的，是的”，肖伯纳说：“但假如他生有我的容貌和你的头脑，那该多么的不幸呀！”

也许你已经看到了近来出的某些书，它们竟将高中教师的数学见解与大学教授办高中班的经验结合到了一起。

---

*伊莎朵拉·邓肯（Isadora Duncan，1878—1927）美国舞蹈家，现代派芭蕾舞的创始人。

**肖伯纳（George Bernard Shaw，1856—1956）爱尔兰的大文豪。

14.17 知识的水平。哲学家斯宾诺莎*在他的“论智力的改进”（Treatise on the Improvement of the Mind）中，将知识区分为四种不同的水平①。斯宾诺莎依据对笛卡儿思维的法则第二条的四种不同的理解方式例举了四种不同的水平。在下面的叙述中，（1）－（4）中提到的“法则”，可以理解为读者以往曾学习过的任何一个数学法则，假如可能的话，可以将它理解成一个曾经分阶段学习并在每一阶段理解得更好的法则。

（1）一个学生从背诵中学习了法则，仅仅在名义上接受了它，而并没有证明，但是他能够运用这法则，并且能正确地应用它，则我们说这学生对这法则具有机械的认识。

（2）这学生在若干简单的情况下试验了这个法则，他自己确信在所有他检验过的情况下它都是正确的。这时他对法则就具有了归纳的认识。

（3）这个学生了解了这个法则的一个论证，则他对这法则就有了理性的认识。

（4）这个学生能清楚而分明地认识这个法则，并且他对它十分确信，不可能对它的正确性产生怀疑，则他对法则就具有了直觉的认识。

（5）我不知道由上面意译出来的斯宾诺莎的这一段落是否已在教育学的文献著作中提到过。但不管怎么说，不同的认识水平的区分是教师应当很好了解的。课程要求他对这

---

*斯宾诺莎（Benedictus de Spinoza，1632—1677）荷兰唯物主义哲学家。

①参阅Philosophy of Benedict Spinoza。下面是斯宾诺莎原文的意译，特别是各类认识水平的名称是作者加上去的。

个那个年级去讲数学的这一章或那一章，但学生应该达到什么样的认识水平呢？达到机械的认识水平够了吗？或是教师应把学生带到直觉的认识水平？这里我们就有了两种不同的目标，而无论选择那一种目标，对于教师或对于学生来讲差别都是很大的。

（6）当我们从教师的立场出发去考虑斯宾诺莎划分的各种认识水平时，我们就产生了几个问题。怎样使学生达到这种或那种水平？怎样去检验学生们是不是达到了这种或那种水平？这些提问对于直觉的认识水平来讲，是最难于回答的。

（7）我们当然还能够划分出比四种还要多的认识水平，其中有一种应当得到教师们（以及学生，特别是立志成为科学家的有雄心的学生）的注意。这就是一种很好地固定的、很好地联结的、很好地接合的认识，一句话，即组织得良好的认识。①

一个致力于达到组织良好的认识的教师，首先应当细心地去引进新的事实。一个新的事实应当来自周围世界的推动，并归属于它，并且与学生的已有的知识、日常的经验和自然的好奇心紧密相联。

当新的事实已被大家所了解，那末它应当被用来去解决新问题，或更简便地去解出老问题，去阐明已知的事情，去开创新的远景。

有雄心的学生应当认真地去钻研新的事实。他应当对它

①参阅习题12.3和序言以及G．波里亚和G．采果的整个计划，Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis。

进行反复考虑，从各种观点去看它、考察它的所有方面，并且尝试在最便于与有关事实相联系的地方将它与他已有的知识衔接起来。这样他就能花最少的力量去最直观地看到新的知识片断，此外，他还应当试着借助于应用、一般化、具体化、类比以及所有其他的途径去推广和扩大他新学到的知识。

（8）作为有责任心的教师，我们可以找出途径，使得一个新的事实转化到学生的经验中去，将它与以前学到的事实联系起来，并通过应用使有关的认识联结在一起。我们只是希望学生的组织得良好的认识能够最终成为直觉的认识。

14.18 重复和对照。假如你喜欢音乐又热衷教学，你就可以在它们之间观察到种种类似之处。你的观察尽管在科学上并不完善，但它们也能帮助你改进教学，可以使得你更艺术地和更有效地去讲授你要去讲的材料。

为什么是这样？重复和对照在所有艺术中都有作用，同样在教学的艺术中也有作用，不过在音乐中它们的作用就最为明显。因此在一个音乐乐曲里面旋律的预示、发展、重复、更迭和变化，可以很好地对课堂上的论题或一个文学作品启示一种类似的处理。

14.19 内部的帮助，外部的帮助。在计划和写这本书的时候，我脑子里想的是高中数学教师的任务，特别是以下讲到的情况。教师给他的班出了一道题目，学生们应当通过他们自己的工作去学习，题目应当在课堂讨论中得到解决。但这一情形要求细心的处置。假如教师辅导得太少，则解题将无进展，假如教师辅导得太多，则学生就得不到从他们自己求解中求得学习的机会。教师应当怎样去摆脱这进退两难的境

他呢？教师应当给学生辅导多少呢？

问题有一种更好的提法：我们不应当去问“多少”，而应当问“怎样”。教师应当怎样去辅导他的学生？有种种的辅导方式。

（1）有这样的情形，教师必须问若干个问题并且把他的提问重复若干次，直到他从学生身上得到一点结果为止。在下面的对话中虚线……表示学生不发言。讨论已经进行了一段时间了，这时教师说：

“再说一遍，什么是未知量？”

“线段AB的长度。”

“你怎样才能找出这样一类未知量？”

…………………………………………………………

“你怎样才能求出一条线段的长度？”

…………………………………………………………

“依据什么已知量你能够求得一条线段的长度？”

…………………………………………………………

“我们以前没有解过这种问题吗？我指的是它的未知量是线段的长度这类问题。”

“我想我们解过。”

“在那时我们是怎样做的？依据什么已知量我们计算出了未知的长度？”

…………………………………………………………

“看这一个图。你们看线段AB，看到了吗？AB的长度是未知量。哪些线段是已知的？”

“AC是给定的。”

“好！还有别的给定的线段吗？”

"BC也是给定的。"

"看看线段AB、AC和BC——注意它们的形状。你说这是什么形状？"

"AB、AC和BC和△ABC的边。"

"△ABC是那一类三角形？"

……………………………………………………………………

好了，这里出现的局面需要一个教师具有无限的耐心。

（2）一个缺乏耐心的教师处理事情就可能不一样了，他会直接告诉学生："对直角三角形ABC用毕达哥拉斯定理。"

（3）两种过程（1）和（2）的差别何在？

最明显的差别是（1）是长的，而（2）是短的。

我们还应注意到另一差别：（1）比起（2）来，为让学生在求解中自己出力提供了更多的机会。

此外还有一个更微妙的差别。

在过程（1）中由教师提出来的提问和建议可以为学生自己所想到。假如你认真观察一下，就会注意到这些提问和建议中有几个是手段，解题者可以把它用到其他问题上，实际上它们可以用到很广的一类问题上去。这些手段可供每个人随意使用——当然，更有经验、"方法论上更有修养"的解题者对它们会运用得更加自如。

然而在过程（2）中，教师告诉学生去实施的行动却不是解题者先前能随意使用的手段，它本身就是解或几乎就是解。这是一个不过问任何一般方法就提出来的一个具体的行动。

我们把热切关心他的问题并熟悉方法论的解题者依靠自

己去解出问题的那种力量，称之为内部的帮助，而把那些与方法论极少关联的帮助称之为外部的帮助——即解题者很少从方法论的考虑中得到的那种帮助。我认为过程（1）和过程（2）之间的最大差别是在前一情形下教师提供的是内部的帮助，而在后一情形下则只是提供了外部的帮助。

（4）假如我们接受了主动学习的原则，我们就必定认为内部的帮助比外部的帮助来得可取。实际上，教师只有在最后时刻，即当他用尽了所有明显的内部的启示而无效果时，或是为时间所迫，才可以给出外部的帮助。

外部的帮助是极少有教益的——它似乎从天而降，很容易使人迷惑失望①。内部的帮助也许是教师能提供给学生的最有教益的事情了，它受到学生的欢迎，并且使学生了解到提问的好处，使他能够自己给自己去提这样的问题，这样学生也就学到了去用这类提问。于是老师的声音也就变成了他自己的心声，当一个类似的场合出现时，这个心声就会提醒他②怎样行动。

为了给出内部的帮助，教师可以应用收集在第十二章里的所有那些"一成不变"的提问和建议——正是由于这个缘故，第十二章对他来说，也许成了本书中心的一章。当然，他首先必须十分熟悉这些提问和建议在什么场合下是可以应用的。本书的计划和写出就是为了在这一任务上能对教师有所帮助。

①参阅§3.2的尾段。

②参阅HSI各章，特别是§17，好的提问与坏的提问，pp.22—23。

14.20 在班里面，当我自己感觉到一个人已经不间断地讲了过长的时间时，我就停下来，向听众提一个问题。这时我常常回忆起德国的一首短谣（下面是它的一个大意翻译）：

所有的人都睡着了，只有一个人在播讲大道。

这样的表演，在这里称之为“教学”。

14.21 怎样的困难？无论是科学家还是教师都会碰到这个问题，科学家也许是在他研究一个题目的时候，教师也许是在他将要把一个题目提到班里去的时候。在答复这个问题的时候，我们必须更多地依靠“感觉”而不是什么清楚的论证。然而我们还是经常能够很好地估计出一个题目的困难程度。科学家的感觉可以用他的研究成果来证实，而教师的感觉则可通过一次考试的成绩来证明。

在大多数情况下，清楚的论证对于估价一个题目的困难程度能够起到、但只能起到很少的作用。然而即使这点小的作用也应得到仔细的考虑。

（1）研究领域的大小。一次进攻发生了(比如，有一个小孩打碎了一块玻璃），而我们了解进犯者是 n 个人中的一个。假如其他事情都同样，则找出进犯者的困难显然随着 n 而增大。一般地说，我们可以想象到一个题目的困难随着研究领域的扩大而增加（参阅§11.6）。

（2）要用到的条款数目。学生们要去求解的题目需要用到末一章中引入的 n 条不同的法则，而对于末一章，比起教程的其他各章来，学生们要生疏得多。在这种情况下，假如其他事情都相同，则题目的困难程度显然随着 n 增加而增大。一般说来，我们可以想见，一个题目的困难程度随着我们尚未掌握、但在解题中必须用到的条款的数目而增大。

（3）前面的考虑可以帮助我们在做一个题目之前，预先判断一下这个题目的难度。在解过一个题目以后，去预后判断它的困难，这就多少明显地包含有统计学的想法。下面举一个大略的例子。在一次考试里面，给100名学生出了两道考题，其中的一道为82名学生解出，另一道则为39名学生解出。显然，后一道题对于这一组的100名学生来讲是更困难一些。但是它对下一组学生来讲是否也更困难呢？统计学家回答说，是的。假如在这两组之间没有非随机的差别，那么这就必然可望具有如此这般的置信程度。然而也存在着麻烦，在教育的事情中，有太多的无法置控的情况，它们的巨大影响使得"随机"和"非随机"之间的区别变得极其不好捉摸。譬如象课程中某处的讲解情况，教师是否强调了那一处，教师的情绪，以及其他许多不可预见的因素等等都会不可置控地影响到考试的结果——它们对考试的影响，比起那些在统计实验中我们可望取得信息的因素对考试的影响来要大得多。我们这里只不过稍微接触到了许多理由中的一个，它应当使得我们在处理教育统计问题时，加倍的小心甚至持怀疑的态度。

当然，当一个数学家去处理一个二百年或二千年前提出来但迄今尚未解决的问题时，他就有一个较好的"统计的"理由去认为该题目是难的（数论里面大有这样的问题）。

14.22 困难和教育的价值。去估计一个题目的难度是不易的，而要去估计一个题目的教育价值就更难了。然而当一个教师要把题目提到他的班里去的时候，他必须设法去估计这二者。

有一种对高中水平的题目的分类法也许有助于教师这方

面的工作。这一类分类由弗·敦克①的工作而著称。下面所讲的分类与它多少有点区别，它把题目分成四种类型：

（1）鼻子底下的一个法则。题目只要直接机械地用一下法则或直接机械地模仿一个例子就可以做出来，同时，所要用的那个法则或要模仿的那个例子又放在学生的鼻子底下。经常见到的是，教师在课堂上把这个法则讲完以后，在后面的时间里就把这样的题目提出来。这种类型的题目，除了提供演习之外别无任何其它。它也许能教会学生去照猫画虎，此外很少有可能教会他别的什么东西。这里包藏着一个危机：即使仅仅对这一法则而言，学生也只能够学到它的“机械的”知识而不是“有见解的”知识。

（2）具有选择性的应用。题目可以应用或模仿课堂上讲过的某个法则或某个例子而解出。然而究竟应当用哪一条法则或哪一个例子却并不是一目了然的。这时需要学生掌握教师在最后几个星期里讲解的内容，同时还要求他们具有能在一个有限搜索范围内去找出所需要的条目的判断力。

（3）组合的选择。为了解出这道题，学生们必须把课堂上讲过的两个或更多的法则和例子组合起来。假如在课堂上讨论过多少类似的（但不是同样的！）这类组合，那末解这个题就不会太困难。当然，假如这一组合十分新奇，或必须去组合的知识片断较多，或者知识片断须取自较远的章节，那末这道题也许就要求较高的独立工作能力且可能会变得十分困难。

---

①Franz Denk Werner Hartkopf和George Polya见参考书目〔11〕，pp. 37—42。

（4）接近研究水平。要想在刚考虑过的那类题目[见（3）]与研究题目之间划一道明确的界线几乎是不可能的。第15章里所举的例子及所作的讨论就是试图概括地列举一些“课堂水平上的研究题目”的特征。

整个说来，当困难程度沿着习题14.21（1）和（2）所示的线路增大时，题目的教育价值也可能增加，特别是假如我们的教育目标是“教会思考”，并且我们就据此来判断价值，那末情况就更是如此了。

14.23 题目的一些样板。为了满足那些不时想冲破教科书中列出的单调的常规题目束缚的教师们的需要，我在别处收集了一些非常规的题目的样板（MPRV.2，p.160）。我想在这里再增加一个“你也许猜错”样板的题目（习题14.25），并增加一种新的样板——“炖青鱼”的题目样板。这后一种样板以它的引人注目与不相干的面目把你的注意力从主要点，从最自然和最有效的步骤上转移出去。然而“炖青鱼”的题目也不要滥用，它们只应当向那些足够机敏的学生们提出来，让他们去发现这一迷惑人的玩笑，并在撇掉那些不相干的东西之后更好地学到本质的东西。见习题14.24。

14.24 求出用多项式x^2-1除多项式

$$x^3+x^5+x^7+x^{11}+x^{13}+x^{17}+x^{19}$$

所得到的余式。

14.25 两个球面互相外切，它们被通过它们公切点的主公切平面所隔开。它们还有无限多个其它公共切平面，这些公切平面的包络是公切锥面。这个锥面与每一球面相切于一圆，锥面在这两个圆的中间部分是一个平截圆锥台体的侧面。

给定这个台体的斜高t，计算

（1）台体的侧面积。

（2）"主"切平面位于切锥内部那一部分的面积。

（决定未知量的数据足够吗？）

14.26 一篇学期论文(所用术语和符号，见《数学和推理》vol.1，pp.137—138，习题33。你也许能用上pp.138—141上的习题34—35的适当的部分和pp.249—256上它们的解。)

考虑

(a) 一个直棱柱

(b) 一个直棱锥和

(c) 一个直重棱锥

上述三个立体中，每一个的底都是具有n条边的正多边形，并且每一立体都内切一个球面，立体上每一个面的切点正好是该面的重心。

（1）对于立体（a），（b）和（c）找出底B的面积和全表面S的面积的比率。

（2）对于（a），（b）和（c），计算S^3/V^2，V代表体积。

（3）将（2）中对于$n=3$，4，5和6所算得的比率数值列成一表。

（4）对（a），（b）和（c）描述它们当$n\to\infty$的极限情形。求出在（2）中计算的比率的极限值，并将它们的数值加到（3）的表格中去。

（5）考虑（未解出的）问题："求一个多面体，具有给定的面数F和给定的体积，并具有最小的表面积"。

对$F=4$，6，8，12和20，叙述一个"似有道理"的猜测。

说明它为什么是似有道理的，并且从你以往的工作里找出支持或反对的证据。

（6）从以往的工作中仔细选出一个能够在高中立体几何班中进行适当处理的特例。

明白地把它表述出来。

注意这些“内部的”提问和建议（比如见 *HSI* 的表“怎样解题”，*pp*.XVI—XVII与本书第十二章）它们很可能被有效地应用于所选的题目。

将所选问题的解的进展用图式表示出来（如我们在班上对于平截台的体积所做的那样，见第七章）。

（7）你如何向高中一个好学生的班级或教师培训班去“推销”这个学期论文题目（说明为什么要选这个题目以及它的一般兴趣何在，说出水平名称，请你说得有力而简洁！）

（8）一个凸多面体的对角线是指多面体的两个端点的连接线段，它除了两个端点之外都在多面体的内部（不在面上）。令D表示多面体的对角线数，对以下的立体算出D

(a)对五种正多面体中的每一种

(b)对于所有的面都是三角形的多面体

(c) 对于一般的多面体，已知它们有F_n个具有n边的多边形的面，$n=3，4，5，\cdots$且

$$F_3+F_4+F_5+\cdots=F$$

（9）（随选）假如前面所提到的内容启示了你某些数学上的想法，即使一时是不完全的，即时注意住它——除非已是非常清楚和简明的。

（上面是我惯常给我的高中教师培训班出的“有体会的结业考试”的一个典型例子。对于（5）见下一章习题15.35，

对于（8）见习题15.13。为回答（6）与（7），有些参加者介绍了一个在教师与学生间的对话，它与本书中特别是*HSI*中介绍的某些对话类似。这些对话中有一些是作得很好的）。

14.27 关于在数学会议上的发言、策墨罗①的法则。一个在数学会议上发言的人和一个课堂上的教师，其处境有一点相似,但不同之处更多。在数学会议上发言的人,也和教师一样，他想告知人们一些东西，但是他的听众是他的同事甚至可能是他的上级，而不是学生。这个发言者的处境是不容易的，同样他的表演也不是常常成功的。但这很多不是他的过错，而是数学的范围太广泛了。任一位数学家只能掌握今日数学的一小部分，而通常是很少知晓下一个数学家所掌握的那一小部分的。

（1）E·策墨罗的名字将永远与一般集合论中重要的“选择公理”联系在一起。策墨罗常常喜欢去咖啡馆消磨一些时间，他在那里散布关于他的同事们的一些讽刺言论，在评论到最近一次数学会议上的一个做得很成功的演说时，他批评演讲者的语调，并最后归结到讲演者不懂得两条法则，而这两条法则，他嘲弄地认为，必须是演讲构思的依据：

Ⅰ.你不能低估你的听众的愚蠢。

Ⅱ.显著的东西要坚持，实质的内容快快溜②。

---

①策墨罗（Ernest Zermelo）波兰数学家。

② 德文原文是：Ⅰ.Du kannst Deine Horer nicht dumm genug einschatzen.Ⅱ.Bestehe auf dem Selbstverständlichen und husche uber das Wesentliche hinweg.

策墨罗的谈吐常常妙语如珠，他的诸多高论，整个来讲虽然不免片面，但却振聋发聩，某些地方还使人感到入木三分。对于包含着两条法则的批评也是这样，我听后不禁失笑并深铭于心难以忘怀，若干年之后我了解到，这些法则若加以恰当地解释，实可成为正确的箴言。

（2）在数学会议上作报告的人，常常把他的听众看成懂得他所谈的题目中的每一个内容——特别是他最近这篇论文的每一个细节。而实际情况往往正相反。报告人最好能了解这一点。他若能高估而不是低估听众对他所讲题目的知识的不足，事情就会好一些。因此，倘使对策墨罗的第一个法则作如下解释：“你不能低估你的听众对你所讲内容的有关知识的缺乏”则报告人将可以从中得到很多帮助。

（3）在数学家的工作里，实质性的东西是什么？证明的每一环节都是实质性的，但是在一个数学会议上不可能对一个长而难的证明的所有环节都作出充分的介绍，即使报告人能急急忙忙将所有环节都交待完，也不会有人跟得上。因此，应当让“实质的内容快快溜”，即证明的各个细节要快快溜过去。

此外，一个长的证明常常取决于一个中心思想，而这个思想本身却是直观和简单的。一个好的报告人应当能从证明中提取出关键的思想，并且设法把它讲得直观而明显，使得听众中每一个人都能够懂得它，体会它，并记住它以作今后可能的应用。报告人在这样作的时候，就成功地向听众灌输了有用的知识，实际上，他就是按着策墨罗的第二条法则“显著的东西要坚持，实质的内容快快溜”在做。

14.28 收场白。我年青的时候，很爱读弗朗斯* 的小说。与其说是因为故事情节生动，不如说更多地是由于受到故事描写语调的吸引。它好象是一位以一种难以言表的讥讽和怜悯审视着人寰的圣哲在诉说。

弗朗斯在我们所谈论的题目上，曾有过这样一段话："不要企图靠去给别人讲很多东西来满足你的虚荣。唤起他们的好奇心，就足以使他们开窍了。不要让他们负担过重，你只须放一颗火种，假如那里放着良好的易燃材料，就定会燃起熊熊大火"（*Le jardin d'Epcure*, *p*, 200）。

我很想把这段话再引申一番："不要企图靠给高中的孩子们讲太多的东西来满足你的虚荣…只是因为你想使人们相信你自己懂得它…"不过我们还是说到这里为止吧。

---

* 弗朗斯（Anatole France, 1844–1921）法国作家。

第十五章 猜测和科学方法①

在数学研究中，非数学的归纳法起着重要的作用。

舒尔*：《就职演说》论文集第一卷，柏林，1901年。

在任何知识领域中，想要比较逼真地去描述发明家们所遵循的方法，总是困难的，……然而，谈到数学家们的心理过程，科学的历史却广泛地确认了一条简单的事实：观察在他们的思索过程中，有着重要的地位并起着很大的作用。

《查尔斯·厄米特**全集》第四卷，P.586。

观察，是精神领域中发明创造的丰富源泉，正象它是可感知的现象世界中的发明创造的丰富源泉一样。

查尔斯·厄米特：《厄米特与斯蒂捷斯书信集》第一卷p.332。

---

①这一章献给我的朋友和同事查理士·劳易纳。

*舒尔（I·Schur）德国数学家。

**厄米特（Charles Hermite 1822—1901）法国数学家。

§15.1 课堂水平上的研究题

数学教育应当使学生尽可能地熟悉数学活动的所有方面，特别是，它应当尽可能地为学生从事独立的创造性工作提供机会。

数学专门家的活动，在若干方面大大有别于寻常课堂教学的活动，通过少量例子，会使我们易于看到，什么样的差别应当受到特别的重视。下面所讲的例子，说明一个好的教师，只须通过适当选题并采用适当的讲授方式，就可以让即使是中等班级的学生，也感受到某种近似于独立探索的体验。

§15.2 例

"给定等腰直角三角形的周长L，计算它的面积A"。这是教科书上常见的一类问题。孤立起来看，这还不能说是一个不好的题目，只不过本身表述得并不十分有趣罢了。我们试将它与下面的表述进行比较，并注意它们间的差别。

"在那些传奇的拓荒日子里"，教师说"土地多的是，但别的却几乎什么都没有。中西部有一个人，有成百亩平整的土地，他想用铁丝网把地圈出一块，但他只有一百码铁丝网，他考虑了各种各样的形状，可弄不清圈进去的土地面积是多少平方码？"

"好了，现在让你们来圈，你们想圈成什么样的形状呢？但要记住，你是要算出面积的，因此建议你最好选简单一些的形状。"

——一个正方形。

——一个长宽各为20和30码的矩形。

——一个等边三角形。

——一个等腰直角三角形。

——一个圆。

"很好，现在我再加上一些：

一个长宽各为10和40码的矩形，

一个边长为42，29，29的等腰三角形，

一个边长为42，13，32和13的等腰梯形，

一个正六边形，

一个半圆。"

"所有这些图形都是等周的，也就是说，周长都相等。今假设它们每一个的周长都为100码，按平方码计算出它们的面积，然后按照面积的大小，大的在先，小的在后，把这十个图形排列起来。顺便提一下，在计算之前，你可以先试着猜猜那一块面积将是最大，那一块面积将是最小。"

这个题目可以作为一个普通高中班级在课程的适当阶段的一个家庭作业。答案列出如下：

圆	795	等边三角形	481
正六边形	722	梯形42，13，32，13	444
正方形	625	等腰直角三角形	430
矩形30，20	600	三角形42，29，29	420
半圆	594	矩形40，10	400

"有什么问题吗？"

§15.3 讨论

我们这个题目的目的，就是要将学生的注意力转到上面写着答案的各种图形面积的表上。对这张表的观察，将会引

起学生们的各种议论。这些议论愈是自发的产生，就愈好。然而，万一时议论不起来，这时教师就要提出一些事先安排好的、逐步地启发的问题来供讨论；譬如

“你们对于这表有什么看法？”

“圆居于表中的首位，对于这件事你们有什么想法？”

“表里面有几个三角形，也有几个四边形。在四边形里面谁居先？在三角形里面呢？”

“是的，也许是象你们所说的那样，但是你已经证明它了吗？”

“假如你还没有证明它，那么你凭什么理由相信你的结论呢？”

“一个三角形可以看成是一条边长为 0（或一顶角为 180°）的退化四边形。这种看法能否有助于你们的思考？”

最后，学生们应当尽可能地依靠他们自己，或迟或早地达到如下观察印象：

列表提示我们，在一切等周平面图形里面，圆具有最大面积；

列表提示，在所有等周四边形里面，正方形具有最大面积；

列表提示，在所有等周三角形里面，等边三角形具有最大面积；

列表提示，在所有的等周 n 边多边形里面，正多边形具有最大面积。

列表的另一提示：两个等周的正多边形中，边数多的面积也大。（一个多边形越象圆，它的面积似乎也越大）

上述这些结论，仅靠列表本身是不能给予证明的，列表

只能或多或少提供使人相信上述结论的某些依据。

我们的经验还提示了更一般的观点，譬如：更多的例证就会提供更多的使人确信的理由。

也许还可以有其他的一些说法。上面的有些结论若在更多的例证下，则可以更快地得到。

§15.4 另一个例子

"希腊人早就知道了"教师说"今天我们称之为海伦(Heron)公式的关于三角形面积的著名命题，它由等式

$$A^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

表示。这里A表示三角形的面积，a，b,c表示三角形的三边长，面

$$S=\frac{a+b+c}{2}$$

表示半周长。

"这海伦公式的证明不很简单，我今天不去证它。在没有证明的情况下，当然，我们不好肯定所列的公式一定是正确的——当我写这公式时，不敢说我的记忆一定没有毛病。你们能够检验这个公式吗？你们将如何去检验它呢？"

——我可以用等边三角形去试它。

此时，$a=b=c$，$s=\frac{3a}{2}$公式得到正确的结果。"我们还能试一些别的吗？"

——我可以用直角三角形试它。

——我可以用等腰三角形试它。

在第一种情形，$a^2=b^2+c^2$，在第二种情形$b=c$，在这两种情况下，通过一些代数运算，公式都得出了正确的结果

（读者应当自己算一下）。

“你们觉得满意吗？”

——是的，核算对了。

“你们能否再想出一个我们可以进行核查的更特殊的情形？”

“退化的三角形怎么样？我指的是一个三角形坍成一条直线段的极端的（或极限的）情形”。

在这情况下，$s=a$（或b或c），公式显然得出正确的结果。

——请问老师，当我们想验证一个公式是否正确时，我们该验证多少情形呢？

读者自己可以去描绘一下由这最后一个问题所引起来的讨论。

§15.5归纳论述的图示

在对上节提出的公式的一系列检验过程中，我们完成了什么？什么是没有完成的？在每一步验证中我们都涉及某个三角形，把所有这些三角形综观一下，也许有助于说明我们的问题。

令x，y和z表示一个可变三角形的三条边（按照长度次序排列），因此

$$0\leqslant x\leqslant y\leqslant z$$

从而必须有

$$x+y>z$$

现在，由于问题仅涉及三角形的形状而不涉及其大小，我们可以假设

$$z=1$$

于是便得到三个不等式

$$(1)\quad x\leqslant y,\ y\leqslant 1,\ x+y>1$$

现在让我们用边x，y和1来表示三角形，或简单地以直角坐标为(x, y)的平面上的点来表示三角形$(x,y,1)$。(1)式中三个不等式中的每一个，都把点(x, y)限制到一个"半平面"上(前两个不等式包含边界线，第三个排除边界线)。(1)中三个不等式的联立就表示平面上的一个点集——三个"半平面"的公共部分或它们的交。这个交集是以(1,1)，(0,1)和$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$为顶点的三角形，见图15.1〔包含顶点(1,1)及邻接的两条边，但其它两个顶点和第三边除外〕。这个三角形区域表示了各种形状三角形的总体，点(x, y)表示三角形$(x,y,1)$，不同的点表示不同形状的三角形。

在§15.4中考虑过的若干特例是怎样分布在图15.1上的？

首先，我们对于等边三角形验证了所提出的公式。这样的三角形是(1,1,1)——我们用这个符号表示图15.2中对应的点(1,1)。

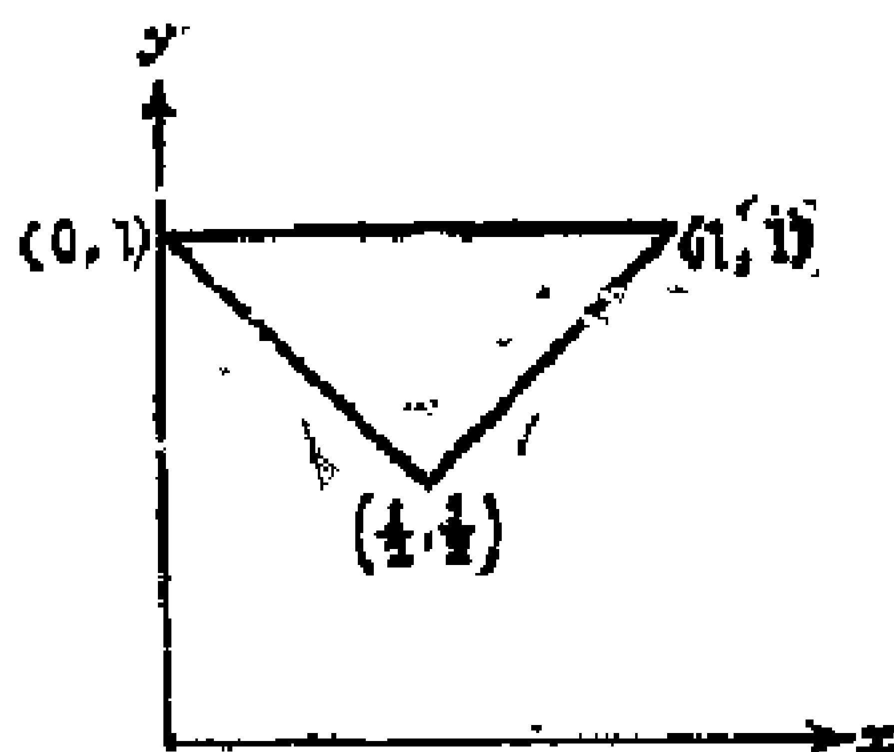


图15.1 各种形状三角形的总体

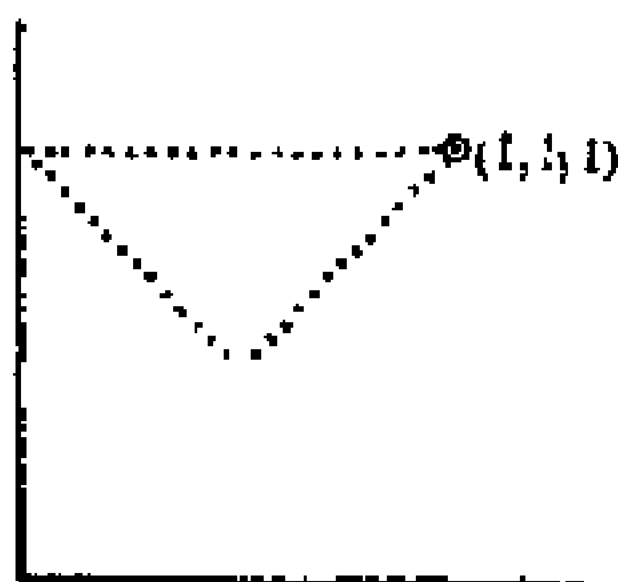


图15.2 对于等边三角形验证

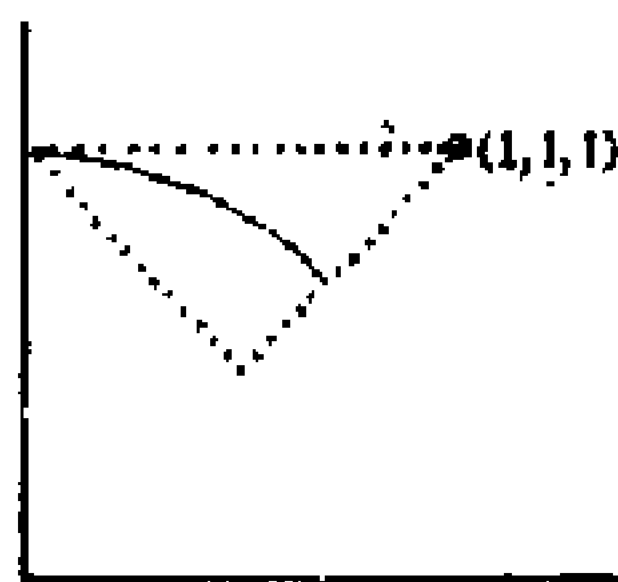


图15.3 …和对于直角三角形验证

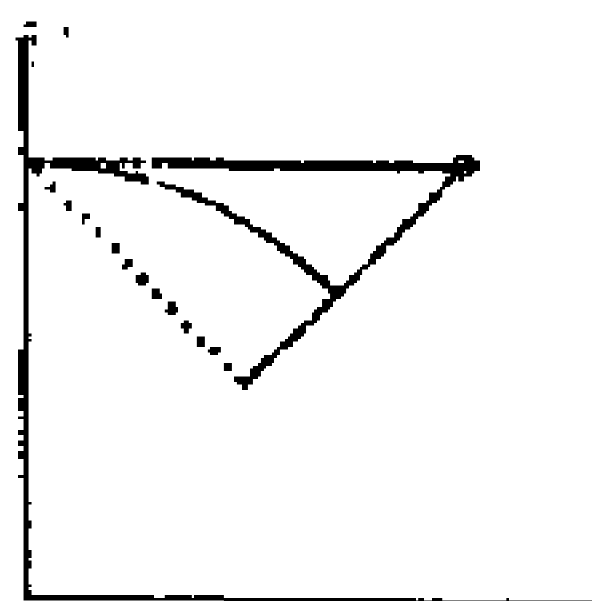


图15.4 …和对于等腰三角形验证

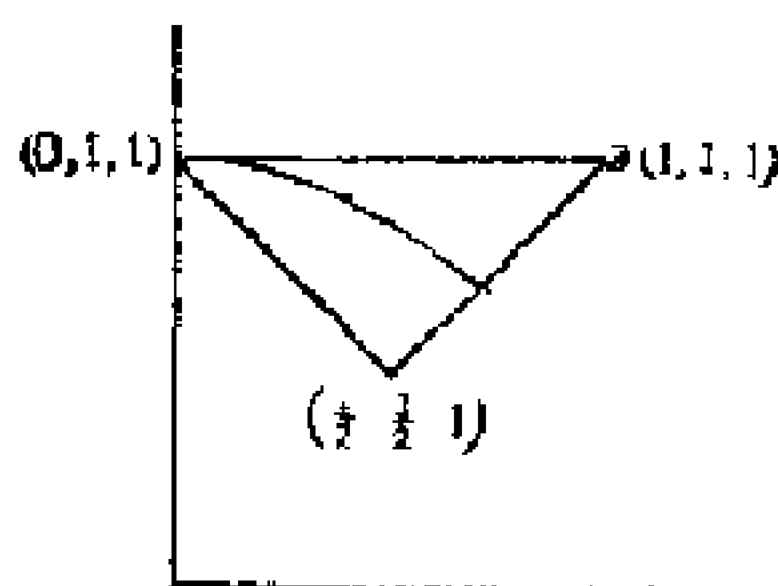


图15.5 …和对于退化三角形验证

接着我们对直角三角形验证了公式。若 $(x,y,1)$ 是一个直角三角形，则它的最大边1也是斜边，因此必有

$$x^2+y^2=1$$

于是直角三角形在图15.3中就表示为一段单位圆的圆弧。

再考虑等腰三角形。这里我们需要区别两类等腰三角形：或者两条较长的边相等因此

$$y=1$$

或者两条较短的边相等因此

$$x=y$$

于是代表等腰三角形的点形成了图15.4中的两条边界线（画成了实线——在前面的图15.2和15.3中仅把它们描成虚线）。

最后，对于退化的三角形（$x,y,1$），为

$$x+y=1$$

这样的"三角形"则是由图15.5中用实线描出的第三条边界线来表示（在前面的图15.2，15.3和15.4中它仅用虚线表示）。

综观一下从图15.2到图15.5的图示系列，我们看到了一个形象化了的归纳论述过程。开始时，在图15.2上，一个点就足以表示了所验证的范围，然后一条又一条的完整的线段出现在图上，它们表示着一类又一类的业已成功地验证了的三角形类。

在我们这个题目的公式中，已被验证了的三角形形状所代表的点，都分布在画出的线段上。然而，对那些并没有被这些线段遮盖的地区所代表的"大部分"各种形状的三角形来讲，公式仍然没有被验证。但是由于公式已经沿着整个边界，并且还沿着一条穿越内部的线段上被验证了，我们有理由期望它在所有情形下都将被证明是正确的。局部启示着，而且是强烈地启示着整体。

§15.6 一个历史上的例

我们将步两位大数学家的后尘，去研究一个立体几何的问题。我将稍后才说出他们的名字，因为要是过早地说了出来，就会坏我们的事。

（1）类比启示一个问题。一个多面体被平面的面所封，就好比一个多边形被直线的边所围。空间的多面体类似于平面上的多边形。然而多边形比起多面体来更简单，更易被人了解。一个关于多边形的问题，比起对应多面体的问题来，常常要容易得多。当我们了解了一个关于多边形的事实，我们总希望去发现一个关于多面体的类比的事实，在这样作的时候，我们往往会有机会碰见一个令人兴奋的问题。

例如，我们知道三角形的内角之和，对于所有的三角形（不管其形状和大小）都是同样的，等于180°，或两直角，或π（弧度，我们习惯于用弧度来度量角）。更一般地，具n边的多边形的内角和为（n-2）π。现在，让他们尝试去发现关于多面体的一个类比的事实。

（2）我们试图穷尽所有可能。我们的目标，不管怎么说，并不十分明确。我们想去发现有关多面体里面的角度总和的某些事实——但是，什么角度呢？

多面体的每一条棱都关联着由它邻接的两个面所包含的一个二面角。多面体的每一顶点都关联着由它邻接的所有面（三个或更多）所包含的一个立体角。那么哪一类的角是我们应当考虑的？是否所有同一类的角的和都有某种简单性质？关于一个四面体里的六个二面角的和有些什么性质？关于一个四面体里的四个立体角的和有些什么性质？

事实证明上面说的两种和当中没有一种与四面体的形状无关（见习题15.14）。多么扫兴！我们曾经期望四面体具有三角形那样的性质。

然而，我们还是有可能去挽救原来的想法。我们还没有列举出所有的可能性。在一个多面体里面，还有着另一类的

角度（事实上这一类才是真相似的）：每一个被n条边（多面体的n条棱）所围的面包含有n个内角，我们称这样的角为面角，现在让我们尝试去求出多面体的所有面角的和。令$\Sigma\alpha$表示所求的和，见图15.6。

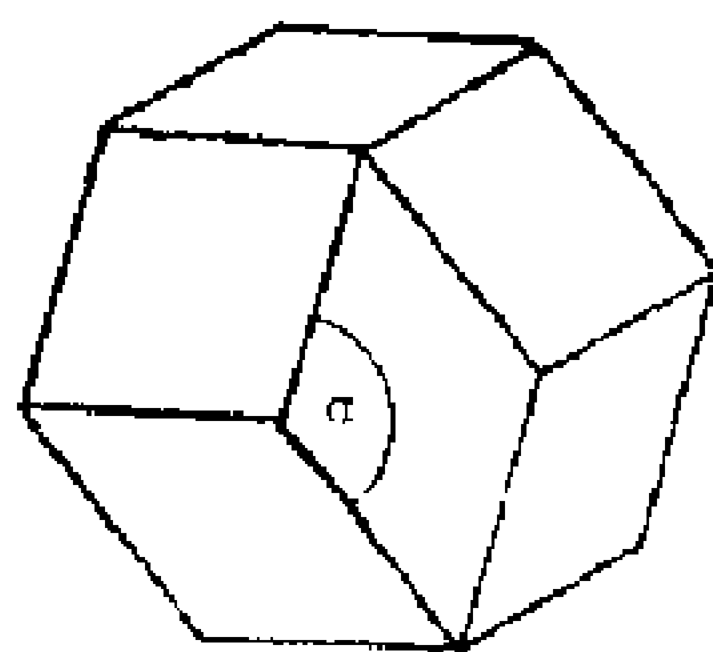


图15.6 面角

(3)我们观察。假如我们在这个问题上别无其它途径，我们总可以作一些试验性的工作：我们选取少量的多面体，并且对每一个算一下$\Sigma\alpha$（面角的和）。我们可以从立方体开始，见图15.7a，立方体的每一个面是正方形，正方形的内

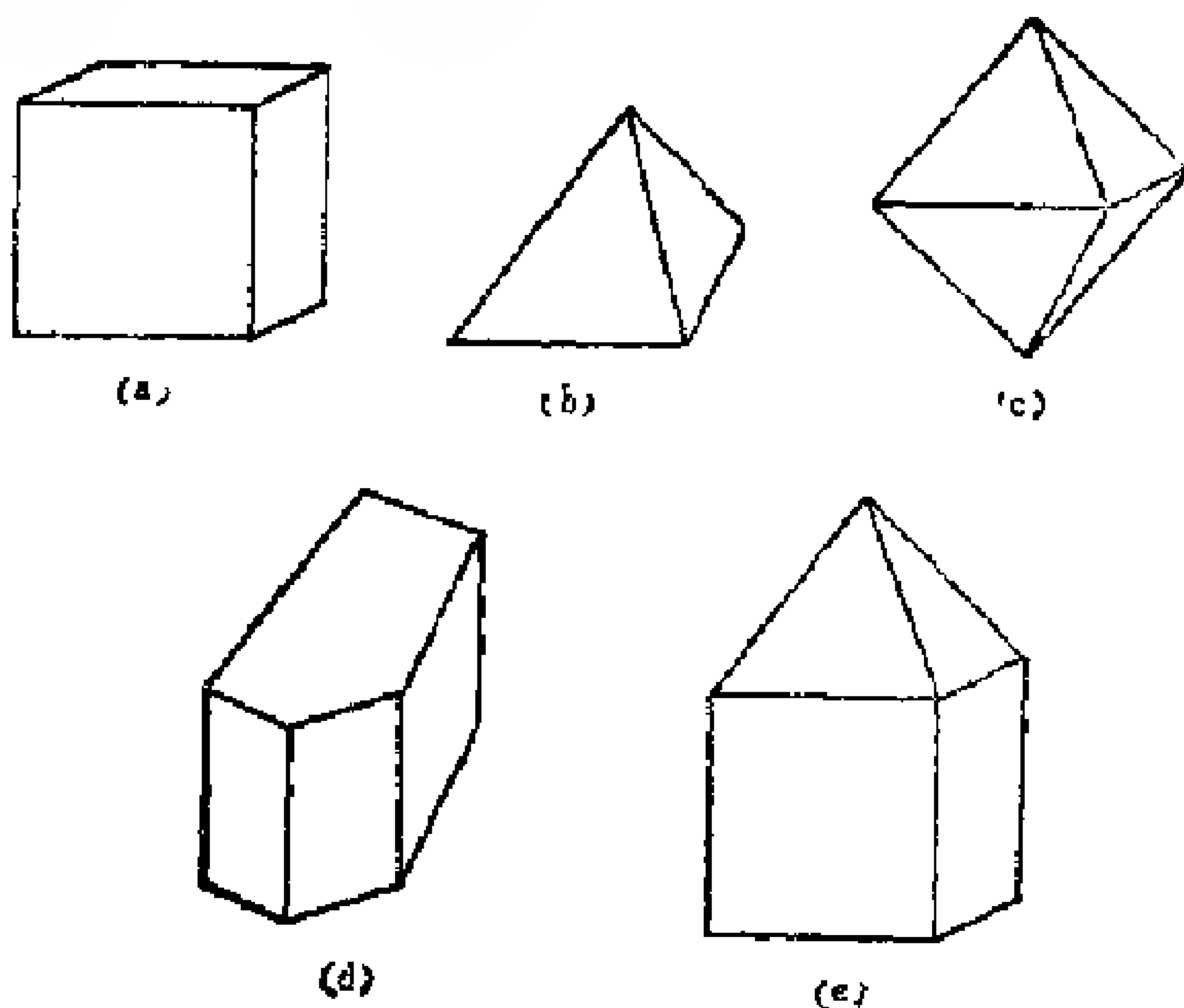


图15.7 多面体

角和为2π，因为有六个面，所以立方体的$\Sigma\alpha$是

$$6\times 2\pi=12\pi$$

我们可以同样容易地来处理四面体和八面体，见图 15.7b 和 c。

前面列举的这三个多面体都是正多面体。现在我们改变一下，来检查一些非正的多面体，例如一个五棱柱（以五边形为底的棱柱，见图15.7d）这个棱柱有两类面：五个平行四边形有两个五边形。因此五棱柱的$\Sigma\alpha$是

$$5\times 2\pi+2\times 3\pi=16\pi$$

现在让我们再看一个在课堂上不常见的多面体，见图15.7e：一个角锥作为“顶”放在一立方体上，所得的“塔”有九个面，五个正方形和四个三角形，因此它的$\Sigma\alpha$便是

$$5\times 2\pi+4\times\pi=14\pi$$

我们将观察所得收集在表1里面，为使得所考虑的多面体更便于辨认，我们在表中也列出每一多面体的面数F。

表 I

多面体	F	$\Sigma\alpha$
立方体	4	12π
四面体	6	4π
八面体	8	8π
五棱柱	7	16π
塔形体	9	14π

你看到有什么可值得注意的吗？——比如某种原则，模式或

规律？

(4) 我们在一种想法的指引下进行观察。戏唱到了这幕，从已收集到的观察材料中，我们尚未能发现什么惊人的东西。这并不为怪，因为没有主导思想的观察，很少会产生有价值的结果。

回想一下走过的路，我们也许能够找出一条摆脱困境的途径。在(3)中，我们反复地计算了面角的总和$\sum\alpha$，在那里，我们先是计算了属于同一个面的那些内角之和——我们很熟悉这种求和，事实上，这个求和的知识正是我们探索的起点。现在我们改变一下，先求一下以多面体的一个隅角为共同顶点的所有那样角度的和。我们并不太清楚这种求和，但是我们知道它小于完全的平面角2π（显然我们现在限于考虑凸的多面体，上面引用的事实是直观的，其证明可查阅欧几里德全集XI 21）令V表示所考虑多面体的顶点数，我们可以看出面角的总和

$$\sum\alpha<2\pi V$$

让我们用上面收集到的材料来证实这个事实！将表Ⅰ扩大成如下的表Ⅱ：

在整个表Ⅱ中，$2\pi V$都大于$\sum\alpha$，而且我们不能不注意到它们的差是常数即

$$2\pi V-\sum\alpha=4\pi$$

这是一种巧合？仅仅说成巧合是不能信服人的。我们不禁要产生这样的猜想，即上面观察到的关系式不仅对我们已检验过的少数的例子是对的，而且一般地对一切凸多面体也是对的。这样我们就产生了一个猜测

$$(?)\qquad \sum\alpha=2\pi V-4\pi$$

表 Ⅱ

多面体	F	$\Sigma\alpha$	V	$2\pi V$
立方体	6	12π	8	16π
四面体	4	4π	4	8π
八面体	8	8π	6	12π
五棱柱	7	16π	10	20π
塔形体	9	14π	9	18π

式子前面括弧里的问号可以提醒我们，上面的关系式仅仅是一个猜测，还没有被证明。

(5) 检验我们的猜测

我们的观察，在一个幸遇的念头的启示下，产生了一个值得注意的猜测——但它是对的吗？

我们再核算稍多一些的例子。还有两类正多面体可待考虑，即具有十二个面和二十个面的十二面体和二十面体。除此之外，我们尚可考虑一般的棱柱，即底为n边形的n-棱柱，以及具有同样底面的n-棱锥，和n 重棱锥（即两个具公共底面的n-棱锥按相反方向合成的几何体，注意n-棱锥的公共底面不是重棱锥的一个面）。于是读者就可以容易地把表Ⅱ推广到上面提到的这些几何形体上。

从推广的表可以看出，对于所有上面考查过的例子，猜测（？）都成立，这确实令人高兴，但这还不等于证明。

(6) 考虑下面的一步。在$\Sigma\alpha$的计算中，我们多次用了同样的步骤；我们总是先算出属于同一个面的内角之和，为什

表Ⅰ的推广

多面体	F	$\Sigma\alpha$	V	$2\pi V$
十二面体	12	36π	20	40π
二十面体	20	20π	12	24π
n-棱柱	$n+2$	$(4n-4)\pi$	$2n$	$4n\pi$
n-棱锥	$n+1$	$(2n-2)\pi$	$n+1$	$(2n+2)\pi$
n-重棱锥	$2n$	$2n\pi$	$n+2$	$(2n+4)\pi$

么不把这个步骤应用到一般的讨论？

为了贯彻这一想法，我们先引入适当的记号，令

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots S_F$$

分别表示第一个，第二个，第三个，……第F个面的边数，于是可得

$$\Sigma\alpha=\pi(S_1-2)+\pi(S_2-2)+\cdots+\pi(S_F-2)$$
$$=\pi(S_1+S_2+\cdots+S_F-2F)$$

这里$S_1+S_2+\cdots+S_F$表示了所有F个面的所有边的总和。在这个总数里面，多面体的每一条棱都计算了两次（因为它总是恰好邻接着两个面），因此有

$$S_1+S_2+\cdots+S_F=2E$$

这里E表示多面体的棱数。于是我们得到

$$(\text{I})\qquad \Sigma\alpha=2\pi(E-F)$$

这样我们就找到了$\Sigma\alpha$的第二个表达式，但它们有着实质上的区别，在（4）里的表示式（?）仅仅是个猜测，然而

（！）是被证明了的式子。假如我们从（？）和（！）中消去$\Sigma\alpha$，即可得到关系式

$$(??) \qquad F+V=E+2$$

因为我们还没有证明它，所以在前面放上一个记号（？？）。它实际上与（？）一样，是未定的。通过已经证明了的关系（！），即知关系式（？）和（？？）中的任一个都可以由另一个推出，因此它们必然同时成立或同时不成立，它们是等价的。

（7）验证。无论是人们熟悉的关系（？？）或较不熟悉的关系（？）都是欧拉发现的，但他并不知道笛卡儿在他之前已经找到了同样的关系。我们是从笛卡儿写在未发表手稿中的一些简短句子中才了解到他在这一题目上所作的工作的。笛卡儿的手稿大约是在欧拉死后一个世纪才发表①。

欧拉是在他的两篇论文和第三篇论文的一个短评中论述到这个题目的②。短评中谈到了一个多面体中的立体角之和〔我们在（2）中已经提到，这个和与立体的形状有关〕。整个来讲，我们前面的论述都遵循着欧拉的第一篇论文，在那篇文章里，他说明他是如何逐步达到他的发现的，但他没有给出正式的证明，而仅仅给出了一堆验证。我们想在这方面也跟着欧拉的步子。根据以前表中所收集的材料，再加进边的总数E，我们可得表Ⅱ。

从表Ⅱ可以看出，所猜测的关系（？？）在整个表Ⅱ中

①《笛卡儿全集》第十卷，pp.265—269。

②Euler, Opera Omnia, ser1, vol.26, PP.xIv—xvl, 71—108, aud 217—218.

表 Ⅱ

多面体	F	V	E
四面体	4	4	6
立方体	6	8	12
八面体	8	6	12
十二面体	12	20	30
二十面体	20	12	30
塔形体	9	9	16
n-棱柱	n+2	2n	3n
n棱锥	n+1	n+1	2n
n-重棱锥	2n	n+2	3n

已得到验证。这是值得欣慰的，但当然，这还不能算是一个证明。

(8) 对所得结果的思索。欧拉在他的第二篇论文里，试图对（？？）给出一个证明，可是他并未成功，在他的证明里有一个很大的漏洞。但实际上，我们在前面所作的种种考虑已经十分接近于一个证明，现在正需要了解一下，我们已经前进到了什么程度。

让我们先设法去了解结果（1）的全部意义。特别地，让我们看一下当多面体变动时会发生些什么。我们想象多面

体在连续地变化：它的面逐渐倾斜，它们的交线与交点、即多面体的棱和顶点，也连续地变化，然而多面体的“总体轮廓”或“形态构造”，即它的面之间的连接，棱和顶点，仍保持不变。也即数F、E、V（即面、棱、和顶点的个数）保持不变。这样一个变化可以影响到每一个个别的面角α的值，但是根据已证明的（1）式，可知它不能在整体上影响面角，也就是说，它必然使得面角和$\Sigma\alpha$保持不变。由此我们就可以看到一种利用这种变化的可能性：我们可以寻找这样一种变化，使得所给的多面体变化成为一种形式，在这种形式下我们更便于去计算出它的（不变的！）$\Sigma\alpha$的值。

为此，我们现在选择多面体的一个面作为“底”。我们把这个底置于水平位置上同时将它伸展（其它面则相对地缩小）使得最后整个多面体能够正交投影到它的底上。图15.8对于（a）立方体及（b）“一般”多面体显示了这种变形结果。这结果是一个坍了的多面体，它被压平成两片重迭的多边形（具有共同边界）：下面的一片（“伸展了的底面”）是未被分划的，而上面的一片则被划分为$F-1$个子多边形，这里F是原多面体的面数。令r表示包围这上下两片的多边形边界的边数。

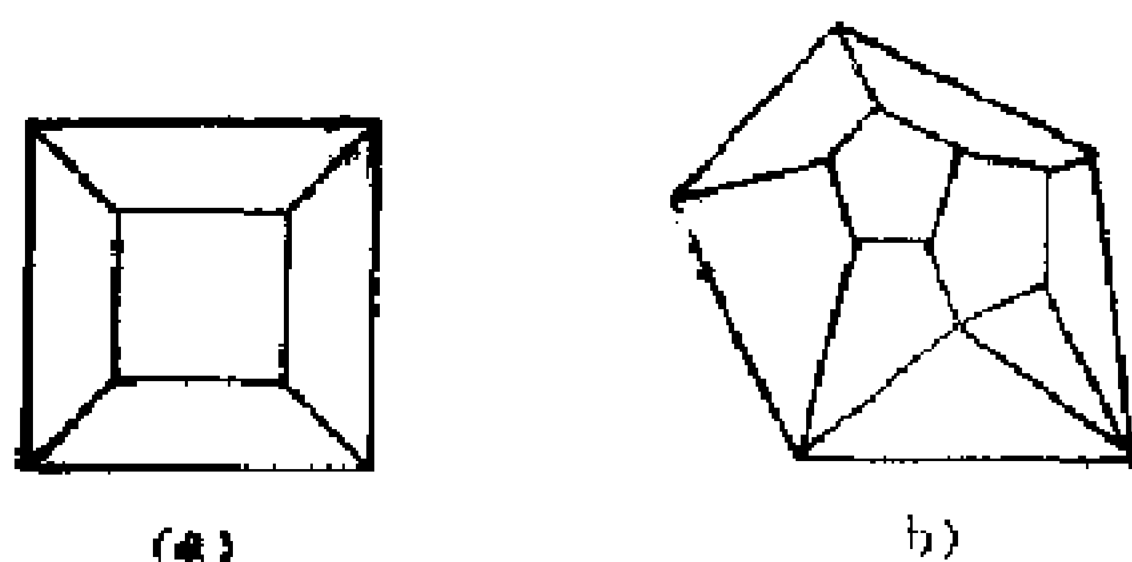


图15.8 压扁了的多面体

我们对于压扁了的多面体来计算它的$\Sigma\alpha$（我们知道它与原来未被压扁的多面体的值相同）。总和由三个部分组成：

下面一片（“伸展了的底面”）的内角和为（r-2）π。

上面一片沿边界线上的内角和与上相同。

上面一片在边界线内部的角的和，它们包围着V-r个内部顶点，因此它们的和是（V-r）2π。

把上面三部分相加，即得

$$\Sigma\alpha = 2(r-2)\pi + (V-r)2\pi = 2\pi V - 4\pi$$

这就证明了我们的猜测(?),从而亦同时证明了（? ? ）。

§15.7 科学的方法：猜测和检验

前面的例子提示给我们若干一般的道理。当然，假如我们能对这些例子及其他类似的例子(见本章末的习题与评注)作更多的论述，则这些道理也就会更自然地体现出来并得到印证。然而即使就是我们上面讨论过的这点内容，也已可以使我们达到如下的认识：

观察可以导致发现。

观察可以揭示某些原则、模型或规律。

观察假如在某些好的想法或某种观点的指引下，更有可能得出有价值的结果（如§15.6(4)）。

观察只能得到推测性的归纳结论或猜测，不给出证明。

检验你的猜测：考查一些特殊情形和结论。

任何特殊情形和结论被验证为正确，都增加了猜测的可靠性。

注意想法和证明之间，猜测和事实之间的区别。

不要忽略了类比：它们可以导致发现〔如多边形和多面体之间的类比，§15.6(1)〕。

考查极端情形〔比如退化三角形和坍了的多面体，见§15.4和§15.6(8)〕。

这些结论，本该用更多的材料，加以更好的组织，特别是提供更多的引证（见*MPR*）来说得更严格准确些。然而即便按现在这样情况，当这些认识从诸如前面的例子中或从精心指导的课堂讨论中提炼出来时，它也能够为高中水平的学生了解科学的本质提示一个基本的观念。

过去和现在的哲学家们，在关于科学、“科学方法”及“归纳法”等等的本质的认识上，提供了五花八门的图象。但是科学家们实际上究竟作了些什么呢？他们不外乎是设计出各种假设性的解释，然后让他们的假设去经受实践的检验假如你希望用一句话来说明什么是科学的方法，那末我提议它是

猜测和检验。

§15.8 “研究题目”若干应有的特征

上面刚论述的题目与常规的习题是有区别的，我想着重说明以下三点：

(1) 学生从课本上或从教师那里得到了要做的题目。在许多场合，教师们较少关心（而课本则根本不管）孩子们是否对这个题目有兴趣。而对数学家来说，恰好相反，题目的选择，即去发现、提出一个有吸引力和有价值并在自己力所能及范围内的问题，也许是决定性的一步。在§15.2和§15.4里，教师引导学生在某种程度上自己参与了提出问题（见

§14.5(1))。

(2) 大多数课本的习题彼此不甚衔接。它们常常只是为了去说明某一法则或者为它的应用提供某些练习。一旦目的完成它们也就湮没无闻。然而，象§15.2和§15.6中的题目就有一个雄厚的背景，它们引出许多挑战性的问题，而这些问题又进一步引出更多挑战性的问题，直到原来的问题的这些分支形成了一个大片（这些分支将在本章末的习题和评注中进行某种程度的讨论）。

(3) 在课堂上，“猜测”往往是一条禁律。然而在数学研究里面，“先猜测后证明”几乎是一条规律。在前面讨论的题目里，观察、猜测、归纳论证，简言之，推理，起着重要的作用。

(4)虽然第(1)点(学生们参与提出问题)是不可忽视的，然而其他两点尤为重要。那些具有背景的、或者与其它的思想领域有联系的题目，以及蕴含着推理过程的题目，比起那些充斥于教本中的、仅仅为了练习这个或那个孤立法则的习题来，更加利于激发学生的思考能力，促进他们智力上的成熟。

§15.9 结论

据我看来，象在本章前面所介绍的那种题目和论述，是可以在高中水平的学生中进行传授的，我认为，它们可以对学生起三个方面的作用：

第一，它们通过让学生作独立的创造性工作而使他们品尝到数学的滋味。

第二，它们不仅增加了学生对于数学的了解，也增强了他们对于其他科学的了解，这点由于它可以影响到学生中更大一部分人而显得更为重要。事实上，它们给学生提供了关于“归纳研究”和“科学方法”的相当好的首次印象。

第三，它们揭示了数学的一个方面，它由于很少被人提及而更加显得重要。数学在这里作为一种“观察的科学”——即借助于观察和类比去导致发现的科学——而显出与自然科学的紧密联系。这个方面应当特别引起未来的数学应用者们，未来的科学家和工程师们的注意。

因此我期望，数学的发现，科学的方法和数学的归纳方面，在未来的中学里将不要象今天的中学里那样完全遭到忽视。

十五章的习题和评注

第一部分

15.1 在那些由§15.2列出的数字所启示的、并在§15.3中叙述的若干猜测中，是否有一些你能够加以证明？列出一些易于入手的结论并加以证明。

15.2〔§15.4〕再想出一些验证海伦公式的方法。

15.3〔§15.5〕在图15.5中，单位圆的一段弧把三角形（它的点代表着三角形的形状）分成两部分，一部分在弧的上部，一部分在弧的下部。问这两个区域所代表的三个形的形状的区别是什么？

15.4〔§15.6（8）〕试设计一种更加确定的从“一般”凸多面体到“压平”的凸多面体的转换。

15.5 考虑具有F个面，V个顶点以及E条棱的凸多面体，以

F_n表示严格地具有n条边的那些面的个数。

V_n表示严格地由n条棱汇交的顶点个数。

说出ΣF_n和ΣV_n的数值。这里符号Σ是$\sum_{n=3}^{\infty}$的缩写。（当然，在F_n中只有有限个数不为0，V_n也同样。因此实际上Σ仅表示一有限和。这符号Σ在以下的有关习题中仍将按这样的理解去应用）。

15.6（续）用几种不同的方法去表示面角数。

15.7（续）适当地选择对角线（“面的对角线”）它们互不相交并且把多面体的每一个面都剖分成三角形。用几种不同的方法去表示多面体所有的面经过剖分所得的三角形数。

15.8 证明

$$E \geqslant \frac{3}{2}F, \qquad E \geqslant \frac{3}{2}V$$

在第一个不等式中，等式能否达到？什么情况下达到？

对第二个不等式提出同样的问题。

15.9 证明在任何凸多面体中，面角的平均值恒不小于$\frac{\pi}{3}$但恒小于$\frac{2}{3}\pi$

15.10 证明在任何凸多面体中总有一面其边数小于6。

15.11 给定了凸多面体的顶点数V，找出F的最大数和E的最大数。

在什么条件下，能达到这些最大数？

15.12 给定了凸多面体的面数F，求V的最大数和E的最大数。

在什么条件下可以达到这些最大数？

15.13 假若一条直线段连接着一个凸多面体的两个顶点，则有三种可能的情形：它可以是一条棱，或为面上的一条对角线，或者是对角线。这最后一种情形发生的充分而必要条件为除两端点外，线段上所有的点都不在多面体的面上。令D表示多面体的对角线数，E、F、V、F_n、和V_n代表的意义与前面的题同。

（1）求五种正多面体的D。

（2）求n 棱柱，n 棱锥和n 重棱锥的D。

（3）当多面体所有的面都为具有相同边数$n=3,4,\cdots$的多边形时，试用F去表示D。

（4）一般地表示D。

用例子去说明每一种一般情形。小心：问题可以是误人的。

15.14〔§15.6（2）〕考虑一个四面体，另$\Sigma\delta$代表它的六个二面角之和，$\Sigma\omega$代表它的四个立体角之和。

对下列三种极限情形计算这两种和：

（1）四面体坍成一个三角形，三条棱变成了三角形的三条边，其它三条棱变成了从三角形某一内点到三顶点的连线。

（2）四面体坍成一个凸四边形，它的六条棱变成为四边形的四条边和两条对角线。

（3）四面体的一个端点趋于无穷远，汇合于它的三条棱变成了垂直于它所对的面的平行直线。

（以一个多面角的顶点为中心画一个半径为1的球面，球面落在多面角内部的那一部分曲面是一个球面多边形，这个球面多边形的面积就作为"立体角"的度量）。

15.15（续）检验15.14题的答案。比较一下所检验的这两个和。它们按同一方式变化吗？它们的变化有关联吗？

15.16 对一个具有F个面，V个顶点和E条棱的多面体，令$\Sigma\delta$表示它的E个两面角之和，$\Sigma\omega$ 表示它的V个立体角之和。对立方体计算这两种和。

15.17（续）对两种不同的易于入手的n-棱锥（退化）

情形计算这两种和。

15.18（续）对于n-棱柱和n-重棱锥中的易于入手的(极限）情形计算这两种和。

15.19（续）对所有考虑过的情形，将这两种和与F、V和E作一比较，观察所比较的量的变化。什么变化看上去最密切相关？

15.20（续）假如你找到了一种为你所有的观察证实了的规则，试证明它。

第二部分

15.21 试猜出下列问题的答案：

在内接于一固定圆的所有三角形中，那一个面积最大？

在内接于一固定圆的所有四边形中，那一个面积最大？

在内接于一固定圆的所有n边形中（n给定），那一个面积最大？

15.22 试猜出下列问题的答案：

在所有外切于一固定圆的三角形中，那一个面积最小？

在所有外切于一固定圆的四边形中，那一个面积最小？

在所有外切于一固定圆的n边形中（n给定），那一个面积最小？

15.23 *不充足理由律*

对于习题15.21和15.22中的问题，“常见”的回答总是正确的①。我们将不在这里讨论它们的证明。我们想探究一下为什么人们在这类情况下猜测总是正确的。

---

①关于习题15.21见MPR一卷pp.127—128。

当然我们不企望得到一个十分确定的回答。然而我想下面所表达的感觉是发自许多人的。

为什么正多边形这样为人熟悉？圆是一种最完美最对称的平面图形，它有无限多条对称轴，它对于它的每一条直径都是对称的。在给定边数的所有多边形中，正多边形在“完美性上最接近”于圆：它最为对称，它比起其它多边形来具有更多的对称轴。因此我们就想到内接正多边形，比起其他同边数的多边形来，更多地“填满”着圆。（同样，外切正多边形则更紧地“怀抱”着圆。）

此外类比也在起着作用。在与上面问题相似的等周问题中（§15.3，习题15.1）正多边形就取到了最大值。

还有其他一些推理方法。我们正要进行讨论的内容有点费解，但是应当受到特别注意。我们在这里面对着具有多个未知量的问题，而对于每一个未知量来说条件都是相同的。条件对于多边形的任何一个顶点来说，不会比任何其它顶点显得有所偏重，也没有一条边显得比其它边的条件更多。因此我们可以期望，在条件得到满足，问题得到解决的多边形中，所有的边都将相等而且所有角也将相等。这样我们便想到了正多边形将是解。

在这种想法下面隐藏着一条推理的原理，我们试将它表述如下：

“在没有充分的选择理由的对象中间，没有一个对象是可以特殊当选的。”

我们可以把这个原理称之为“不充足理由律”。这个原理在问题的求解中有时是重要的，它在很多时候能使我们预测到问题的解，或者能选出引导到解的步骤。从数学的角度去

看，将这个原理表述得更明确些是更方便的：

"在条件里地位相同的未知量，可以想见它们在解答中的地位也相同。"

或更简单地："在条件中没有区别，则在结果中也无区别"，或"满足同样条件的未知量的值可以期望是相同的"。

在几何问题里，这个原理特别适用于对称性（如我们已见到的）。因此我们有时发现不充足理由律的下面的叙述方式更具有启发性（虽然实际上它们是更不明确了）：

"我们期望问题数据和条件里的对称性将在解里得到反映。"

"对称性由对称性所产生。"

在某种程度上，"数据和条件里的对称性"不仅仅被"求解对象"所反映，而且亦为"求解过程"①所反映。

当然，我们不要忘掉这原理仅仅是启示性的，不能作为确定性的推理依据②。

这条不充足理由律在不是纯数学的问题中亦起着一定的作用③。

一个抵制这个原理的明显的例子，假如我们运用某些代数术语，就可以简明地叙述如下。这个问题是：若n个量的n个初等对称函数已给定，求这n个量。不充足理由原理使得

---

①见HSI，pp.199—200（对称）及关于术语的习题5.13。

②参考MPR，一卷，pp.186—188，习题40和41。也可参阅作者的文章"On the role of the circle in certain variational problems"，Annales Univ.Scient.Budapest.Sectio Math.，v.3-4，1960—1961，pp.233—239

③见J.M.Keynes.A treatise on probability，pp.41—64。

我们期望这 n 个量是相等的。然而系数"随机"给定的一个代数方程的n个根可以是互不相等的。

15.24 布里丹*的驴。一头很饿的驴，正面对大小相等而且同样美味的两堆干草，一堆在左，一堆在右，而它自己正处在两者中间完全对称的位置上，在两堆干草同样的吸引之下，驴子无法确定该去享受那一堆，最后终于饿死。

可怜的驴。——它成了不充足理由律的一个牺牲品。

15.25 在内接于一个固定球面、且具有固定顶点数V的一切多面体中，哪一个具有最大体积？

试对$V=4,6,8$ 三种情形猜出解答。

15.26 在外切于一个固定球面且具有固定面数 F 的一切多面体中，哪一个具有最小体积？

试对$F=4,6$和8猜出解答。

15.27 给出球面半径，计算内接立方体的体积。

15.28 把半径为r的球面看作地球仪，在赤道上内接一个正六边形。这正六边形的六个顶点加上南北极共八个顶点构成一个重棱锥。计算它的体积。

有何评论？

15.29 给定球面半径，计算其外切正八面体的体积。

15.30 一个以正六边形为底的正棱柱外切于一个半径

---

*）布里丹（John Buridan，1300？—1360）十四世纪法国唯名论哲学家，是奥卡姆（william of Occam）的信徒，倾向于决定论，认为意志是环境决定的，反对他的人提出这样一个例证来反对他：假定一头驴子站在两堆同样大小同样远近的干草间，如果它没有自由选择的意志，它就不能决定究竟该吃那堆干草，结果它就会饿死在这两堆干草之间，后人就把这个论证叫做"布里丹的驴子"。

为r的球面，姑把这球面当作地球仪。棱柱面切球面于八个点：均匀分布于赤道上的六个点及南、北极。计算棱柱的体积。

有何评论？

15.31　比较前面题目中考虑的立体（将15.27与15.28进行比较，将15.29与15.30进行比较），试找出一个合乎情理的解释。

15.32　下面是一条合乎情理的假设：在内接于同一球并具有同样顶点数的两个多面体中间，具有较多的面和棱的面那一个可能更多地“填满”了球面。若承认这一点，那么哪一类多面体可望是15.25题的解？

15.33　下面是一条合乎情理的假设：在外切于同一球面且具有同样的面数的两个多面体中间，具有较多顶点和棱的哪一个可能更紧地“怀抱”着球面。若承认这一点，那么哪一类多面体可望是习题15.26的解？

15.34　第15.31题有没有启示更多的内容？

15.35　在一切具有固定表面积和固定的面数的多面体中，哪一个具有最大体积？

试对$F=4$，6和8猜出解答。

15.36　解方程组，求出所有的解：

$$\begin{cases} 2x^2-4xy+3y^2=36 \\ 3x^2-4xy+2y^2=36 \end{cases}$$

关于不充足理由律这里该怎么说？

15.37　解方程组，求出所有的解：

$$\begin{cases} 6x^2+3y^2+3z^2+8(yz+zx+xy)=36 \\ 3x^2+6y^2+3z^2+8(yz+zx+xy)=36 \\ 3x^2+3y^2+6z^2+8(yz+zx+xy)=36 \end{cases}$$

15.38　解方程组，求出所有的解：

$$\begin{cases} x^2+5y^2+6z^2+8(yz+zx+xy)=36 \\ 6x^2+y^2+5z^2+8(yz+zx+xy)=36 \\ 5x^2+6y^2+z^2+8(yz+zx+xy)=36 \end{cases}$$

15.39　物理学中的不充足理由律。或自然应当是可以预见的。在阿基米德的著作《关于平面的平衡或平面的重心》[1]的开头，处理了杠杆的平衡。（杠杆是一条刚性的水平杆，由一个点支持着，该点称为支点，杆的重量可以忽略不计）。阿基米德考虑了以杠杆的中点为支点，且两端点带有相同重量的情况（见图15.9）。他把这一完全对称的情形存在着的平衡当作显然的事实加以承认。事实上，他的第一条公理就是说“等距离上的相同重量处在平衡中”。确实，这时杠杆是在布里丹驴子的处境中，它没有充分理由去倾向于两边中的任一边。

我们在这里可以把事情看得更深些。让我们想象一下，

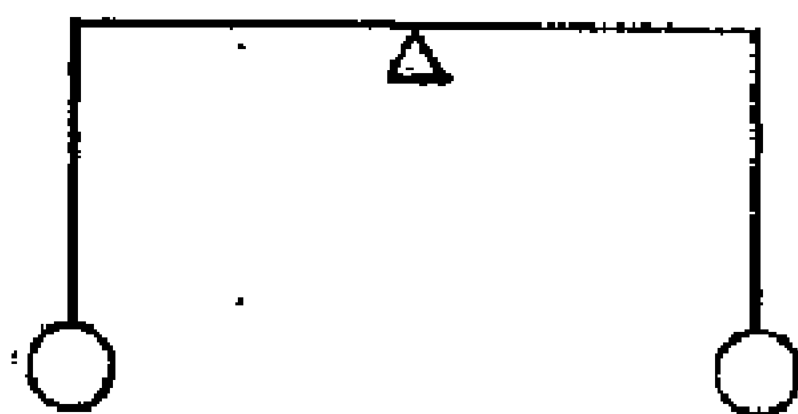


图15.9　等距离上的相同重量

假如有一个人否认阿基米德公理，并且提出了一条不同的法则：在图15.9的情况下，右端的重物向下坠，则我们看将会产生什么结果。好，假如当我在看这杠杆时这人的预见被证明是对的，那么对于处在我的对面从相反方向在观察杠杆的

[1] 见T.L.Heath编的《阿基米德论文集》，p.189。

朋友来说，这个预见就必定被证明是错的。因此这一条与阿基米德公理抵触的法则不可能普遍成立。我们现在可以看到一个使我们倾向于接受阿基米德公理的更深的信念的源泉：我们希望自然是可被预见的。

15.40 在一个球面上选n个点。在下面提出的一系列的类似的问题中，头两个问题是习题15.25和15.26的重述。

在一给定球的表面上，选择n个点，使得

（1）以这n个点为顶点的内接多面体具最大体积。

（2）具有n个面且与球面在这n个点相切的外切多面体具有最小体积。

（3）n个点之间的$\frac{n(n-1)}{2}$个距离中的最短距离取到最大值。（一个"最大的最小值"，这是"n个厌世者的问题"）。

（4）每一个点带有单位正电荷，这n个互相排斥的电荷应处于最稳定的静电平衡之中。

（5）在这球表面上，有一个任意的质量的连续分布，其密度可在n个点上测量。选择n个点，使得在这n个点的测量基础上，总的质量可以最精确地估计到。（这是一个世界性的通讯社的"n个采访记者问题"，或者是最佳插值问题。对于直线段来讲，高斯用他的著名的机械求积在某种意义上解决了类似的问题。）

在所有上面五个问题中，若$n=4$，6，8，12或20，则某些内接正多面体的顶点应当加以考虑（即使它们可能得不到解，正如前面某些例子所证明的那样）。请参阅 *L. Fejes-Tóth*，《*Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel*

und im Raum》。

若n个点是任意选的（当n不很大，夜空中的n个最亮的星似乎就是这么选的），则一个点到它的第一个邻近点，第二个邻近点，第三个邻近点，等等的平均距离就可以计算。见作者的一篇文章，《*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*》，*v*.8，1935，*pp*. 126—130。

15.41 **更多的问题。** 考虑某些与本章讨论过的题目类似但又并不相同的研究题。特别注意考虑题目的如下若干方面：这个题目是否适宜于课程或那些方面适宜于课程？这题目有教益吗？它有一个很好的背景吗？它描绘了某些有趣的思想吗？它是否为归纳和推理提供了机会？或者为课堂水平的挑战性的证明提供了机会？应当怎样对它在课堂上进行介绍？

15.42 在§15.4中我们借助于讨论若干特例来检验一般公式，你在什么地方见到过这类讨论？在更多的场合中进行这样的讨论。这种讨论的优点是什么？

15.43 §15.5的主要目的是对归纳论证进行图示。学生们能够在这一节中从其它方面得到收获吗？

15.44 **周期的十进小数。** 三个十进位展开

$$\frac{1}{6}=0.166666666\cdots$$

$$\frac{1}{7}=0.142857142\cdots$$

$$\frac{1}{8}=0.125$$

属于三种不同类型。表示$\frac{1}{8}$的是一个有限十进位展开，其它的两个则是无限展开。事实上，它们乃是循环的、重复的或周期的十进小数。用标准记号，它们可写成如下形式

$$\frac{1}{6}=0.1\overline{6}$$

$$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$$

横杠加在循环节或周期上，即无限次经常重复的那一列数字上。$\frac{1}{6}$的周期长为1，$\frac{1}{7}$的周期长为6，一般地，在一个周期里面数字的个数，就称为周期的长。$\frac{1}{7}$的十进展开式是纯周期的，而$\frac{1}{6}$的则是混合的。即前者不包含有不属于周期的数字，而后者则包含着不属于周期的初始数字列。这里可再举几个这三种类型的例子

$$\frac{39}{44}=0.88\overline{63} \qquad \frac{19}{27}=0.\overline{703} \qquad \frac{19}{20}=0.95$$

用观察尽可能多地找出关于这三种类型的十进位小数，关于它们周期的长度，关于在周期里数字的分布，或在你认为值得注意的任何其它什么。试证明或否定你在观察中得到的种种猜测。

选择你想去观察的分数，或者考察一下在下面（1）到（7）中所列出的分数展开成的十进位数：

（1）$\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{7}$.

（2）$\frac{1}{7}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{100}{7}$, …

（3）所有分母小于14且分子分母互质的真分数。

（4）所有分母等于27且分子分母互质的真分数。

（5）$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{11}$，$\frac{1}{37}$，$\frac{1}{41}$，$\frac{1}{73}$，$\frac{1}{101}$，$\frac{1}{239}$。

（6）$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{99}$，$\frac{1}{999}$，$\frac{1}{9999}$。

（7）$\frac{1}{11}$，$\frac{1}{101}$，$\frac{1}{1001}$，$\frac{1}{10001}$。

无论如何要注意到并完全理解

$$7.000000\cdots \quad 6.99999\cdots$$

$$0.500000\cdots \quad 0.49999\cdots$$

15.45（续）观察

$$\frac{1}{9}=0.111111\cdots \qquad \frac{1}{11}=0.090909\cdots$$

$$\frac{1}{27}=0.037037\cdots \qquad \frac{1}{37}=0.027027\cdots$$

$$\frac{1}{99}=0.01010101\cdots \qquad \frac{1}{101}=0.00990099\cdots$$

$$\frac{1}{271}=0.0036900369\cdots \qquad \frac{1}{369}=0.0027100271\cdots$$

并加以说明。

15.46（续）从十进位展开出发，并将底数从10变为2，我们就得到二进位展开。下面是一例子

$$\frac{1}{3}=0.01010101\cdots$$

若要说明在二进制下等式右端的意义，只须将上面的等式写成：

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\cdots$$

如同在习题15.44和15.45中对十进位展开进行过的查核一样，对二进位也进行同样的查核。

15.47（续）评价一下列于习题15.44，15.45，和15.46中的研究计划的教育价值。

15.48 梯形数。图15.10*a*表示了三角形数

$$1+2+3+4=10$$

（参阅习题3.38和图3.8）。我们可以类似地称数

$$3+4+5=12$$

为“梯形数”，见图15.10*b*。假如我们把极端情形也包括在

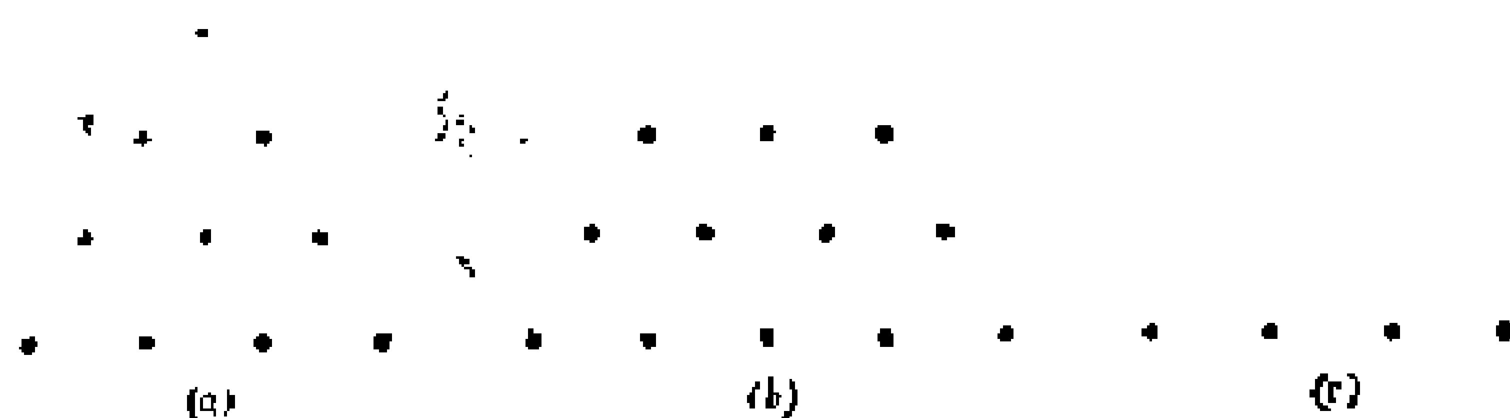


图15.10 三角形数和梯形数

我们的定义之内（这常常是我们所期望的），那末我们必须把图15.10中（*a*）和（*c*）表示的数也认为是“梯形”的（因为它可以用图15.10*c*中一行点表示），但这样的定义就没有多少意思了。因此这就导致我们得出下面的定义。

令$t(n)$表示一个正数n的梯形表示的个数，即将n写成为连续正数和的表示式的个数。下面是一些例子：

$6=1+2+3$

$15=7+8=4+5+6=1+2+3+4+5$

当

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 15,\ 81,\ 105 \text{时},$$

$$f(n)\quad 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,$$

在你进行了适当的观察之后，试找出$f(n)$的一个“简单表达式”，若可能的话，给出证明。

15.49（续）图15.11对于综合你的观察提供了图式上的帮助。让我们把n的如下形式的表达式

$$n = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+r-1)$$

（r项的和）称为n的一个具有r行的梯形表示。若n有一个具有r行的梯形表示，则我们在图15.11上标上一个横坐标为n纵坐标为r的黑点，而且图上仅仅标出这样的黑点。

若$f(n)=1$，则n的唯一的梯形表示必然是$r=1$的“平凡”表示。试列出图15.11中$f(n)=1$的数n。

若p是一个素数，$f(p)$是什么？

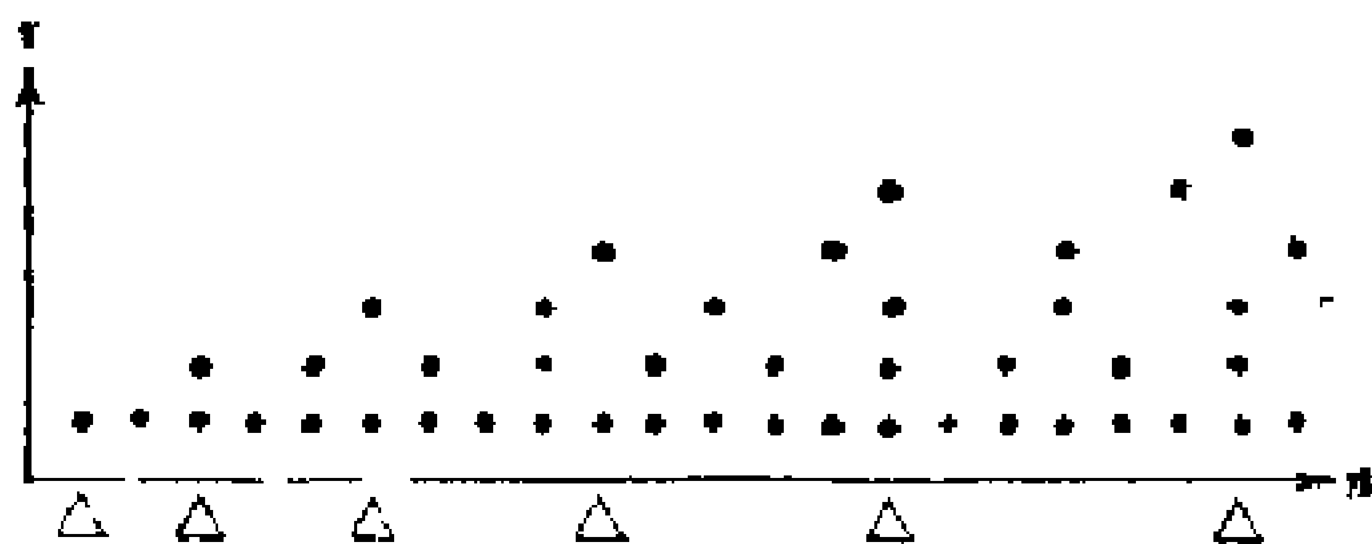


图15.11 具r行的n的梯形表示

15.50（续）令$S(n)$为正整数n写成连续的奇正整数和的表示式的个数。找出$S(n)$的表达式。

例：

$15 = 3+5+7$

$45 = 13+15+17$

$48 = 23 + 25 = 9 + 11 + 13 + 15 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

当

n 2，3，4，15，45，48，105时

$S(n)$ = 0，1，1，2，3，3，4

15.51 评价一下在习题15.48和15.49中所列的研究计划。

15.52 考虑三个平面图形

（1）具铅直对角线的正方形

（2）外接于它的半径为a的圆

（3）外切于圆且具有铅直边的正方形

图形（1）中的铅直对角线把每一个图形都划分为对称的两半。将三个平面形围绕公共的铅直对称轴旋转，得到三个立体图形

（1）一个重锥

（2）一个球

（3）一个圆柱

对所有这三种情形，计算

V， 立体图形的体积，

S， 立体图形的表面积，

A， 平面图形的面积，

L， 平面图形的周长，

X_A，平面图形的半区域的重心到旋转轴的距离，

X_L，平面图形的半周界的重心到旋转轴的距离，

将计算出来的18个量列成3×6的表，观察，并试解释你的观察所得，

15.53 观察

$$\sqrt{2}-1 \qquad\qquad = \sqrt{2}-\sqrt{1}$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} \quad = \sqrt{9}-\sqrt{8}$$

$$(\sqrt{2}-1)^3 = 5\sqrt{2}-7 \quad = \sqrt{50}-\sqrt{49}$$

$$(\sqrt{2}-1)^4 = 17-12\sqrt{2} \quad = \sqrt{289}-\sqrt{288}$$

试加以推广，并证明你的猜测。

15.54 你猜测出来的结果是什么常常是无关紧要的，但是你如何去检验你的猜测却是至关重要的。

15.55 事实和猜测。下面的故事是关于约翰先生和一个看门人的，我不能保证它的确实性。约翰先生，是大英学士会的一名会员，当然，他在事实和猜测之间，想必一定能划出一条明白的界线。而看门人，他受雇看管学士会的建筑，在那种场合下，谅必不能划出一条明确的界线。

一天约翰先生参加大英学士会的一次会议，来得有点晚了，因此显得很匆忙。他须要先到衣帽间去存放他的帽子，

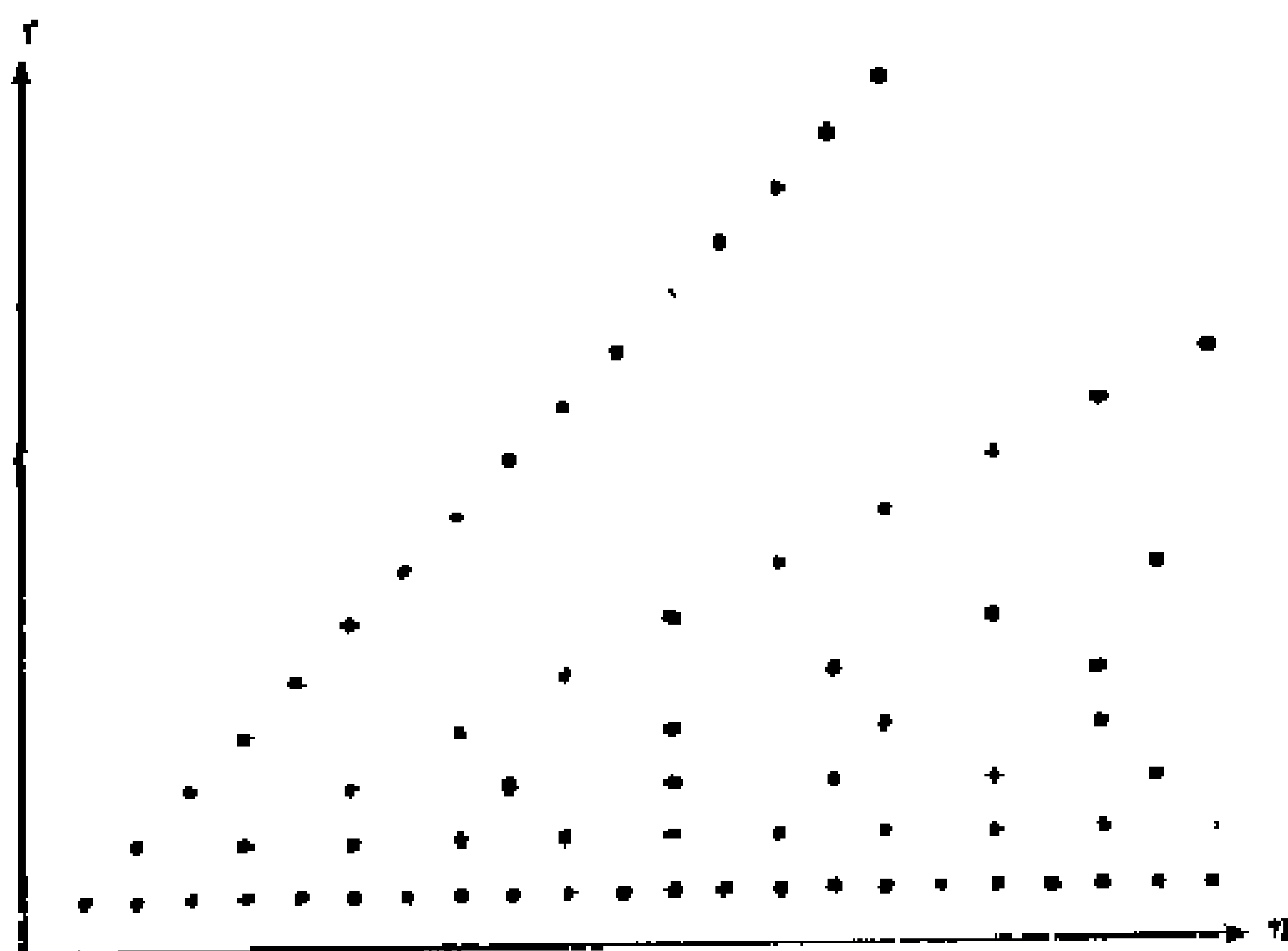


图15.13 给自己的忠告，一张莱卜尼兹图表：n可被r除尽。

并接受一张附有数字的凭条。那天正是看门人管理衣帽间，他关切地说"先生请吧，不必等了，等会您来取帽子不用条子"。约翰先生没有拿条子就很感激地去开会了，然而却多少有点挂记他的帽子的命运。当会开完后他来到了衣帽间，这看门人毫不犹豫地交还了他的帽子。约翰先生显得很高兴，但不知道是什么促使他问看门人："你怎么知道这是我的帽子？"我弄不清这看门人出了什么事——也许他感到约翰先生的声调神气了点——总而言之他回答得有点挖苦："先生，这是您给我的帽子，我不知道这是否是您的帽子。"

习 题 解 答

第 七 章

7.1图7.10里的联线表示下列关系

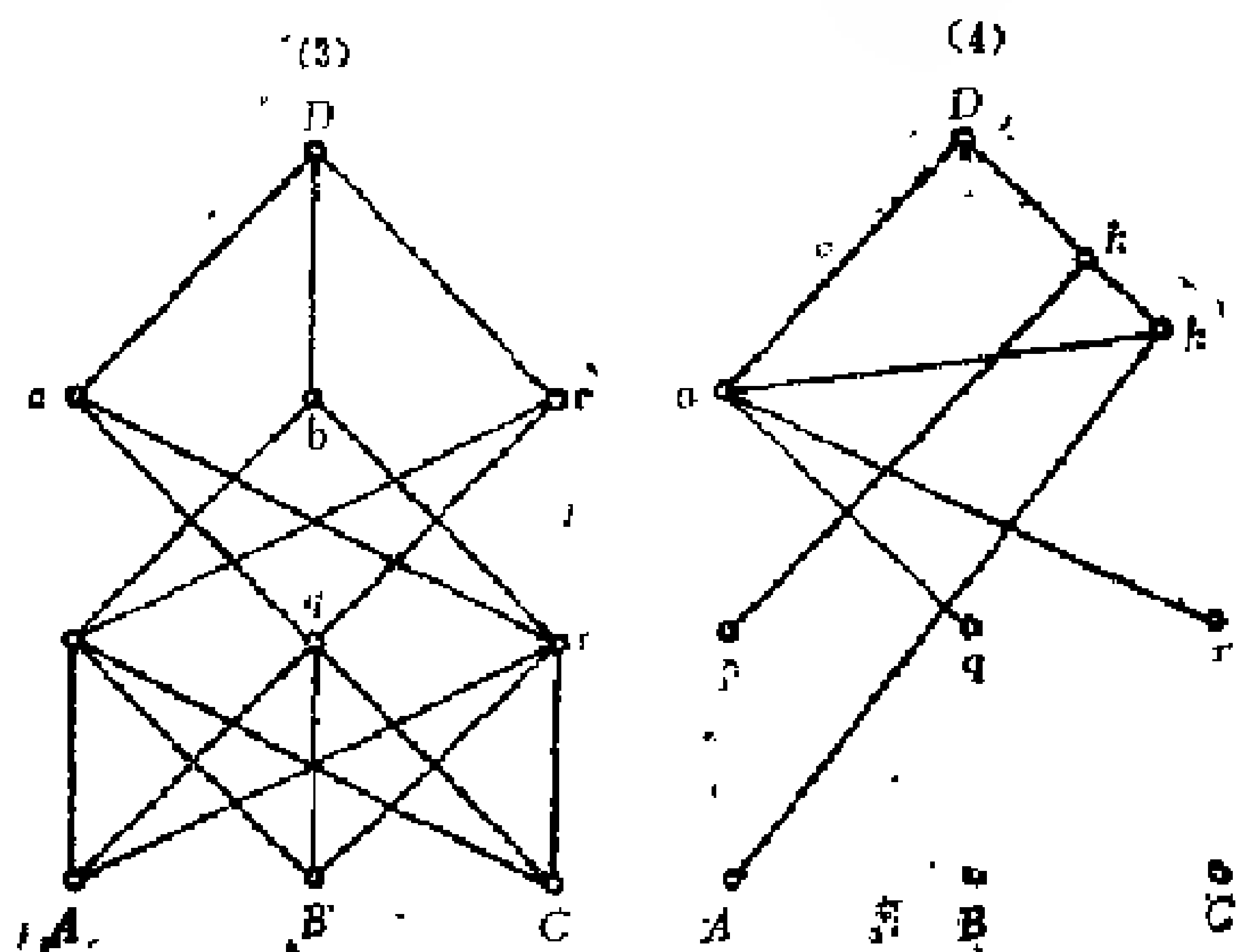
$$F=Q+4T+4P$$

显然

$$Q=a^2h,\quad T=\frac{h}{2}\cdot\frac{b-a}{2}\cdot a,\qquad P=\frac{h}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

在图7.10中引进表示这些关系的连线，并验证由上面这些关系产生的F与用正文中考虑的方法得到的F有相同的表达式。

7.2见图$S7.2$（3）和$S7.2$（4）。后者表示的就是到第



图S7.2　(3)　(4)

一卷p.38最后一行前为止的思维活动情况。

7.3、7.4、7.5是评注，不存在解的问题。

第 八 章

8.3 （斯坦福大学，1956）由图8.3

$$AB'=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad AC'=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

对$\triangle B'AC'$用余弦定理

$$3x^2=b^2+c^2-2bc\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

再对$\triangle ABC$用余弦定理以表示$bc\cos\alpha$，令$bc\sin\alpha=2T$，其中T是$\triangle ABC$的面积，于是得

$$6x^2=a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,T$$

显然T关于a，b和c是对称的。

8.4 “蹄子”的三组横截面是

(1) 面积为 $2yz=\frac{2hx\sqrt{a^2-x^2}}{a}$的矩形，

(2) 面积为 $\frac{xz}{2}=\frac{h(a^2-y^2)}{2a}$的直角三角形，

(3) 圆的一个弓形。

由此可见平面(2)略胜一筹，因为这时横截面面积是y的有理函数。于是所求体积为

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}xz\,dy=\frac{2}{3}a^2h$$

8.1，8.2，8.5，8.6，8.7，8.8是评注，不存在解的问题。

第 九 章

9.5 见§4.4。在那里，在§4.4(1)中叙述而用图4.4表示的定理A是借助于在§4.4(2)中叙述而用图 4.3 表示的较弱的定理B去证明的。

9.6 问题A与B是等价的。由A过渡到B 有明显的好处，因为这样我们可以去处理更小的数。重复这一步骤，我们便依次得到下列数对：

(437，323)　(323，114)　(209，114)　(114，95)　(95，19)　(76，19)　(57，19)　(38，19)　(19，19)

于是437和323的公因数只有1和19，所以19是它们的最大公因数。这个例子里用的方法应用很广，它是一个基本的方法，通常叫做欧几里德除法算式（见欧几里德原本，第七卷，命题2）。

9.7 (1). 在某些重要而且经常碰到的情况下，B 的条件比A要宽（例如在下面这个简单情况里：$f(x)$ 在闭区间$a\leqslant x\leqslant b$上连续，有导数，且$f(x)$不在$x=a$和$x=b$取到极大值）。

(2) 求方程$f'(x)=0$的根在多数情况下是一个比较熟悉的问题。此外我们也知道怎样去掉那些$f(x)$不取极大值的根的方法。

9.8(1) 定理B较强，由它可立即推出A。

(2) B比A容易证，因为B比A叙述得更确切，使得我们容易下手。如果我们只有叙述不太完全的A，我们就还得去找更确切的叙述或某些等价的叙述。由于B比A更明确，所

以这个较强的定理比A更容易下手。这种情形是很典型的（参见HSI，pp.114—121，特别是p.121，归纳法和数学归纳法，特别是第七点）。

（3）设A表示三角形的任一顶点，M是对边的中点。首先证明$\triangle MGO \backsim \triangle AGE$，由此可推出$MO \parallel AE$。

9.9（1）A是一个求证的问题，B是一个求解的问题，它比A来得更广些，因为由B的彻底解决就可以证明A的结论或是否定A的结论。

（2）A是一个极限的问题，而B是一个代数不等式，所以B比A来得初等。

（3）我们不考虑$\varepsilon \geqslant 1$这种简单情形。当$\varepsilon < 1$时，我们有下列等价的条件

$$\sqrt{x+1} < \varepsilon + \sqrt{x}$$

$$1 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2 < x$$

这就是说，从x的一个确定的值开始，量$\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$就小于ε——一个任意（任意小！）的正数，这就证明了A。

9.10（1）A、B里提到的命题是等价的（只是说法换了位置），因此A、B这两个问题是等价的。

（2）“n是合数”这句话断言存在两个大于1的整数a和b，使得$n=ab$。“n是素数”这句话否定了n是合数（这里我们不考虑$n=1$的情形），但这个“反面的”叙述除了否定外没有提供更多的东西，因此B显得较容易处理些。

（3）如果$n=ab$，则

$$2^{n}-1=(2^{d})^{b}-1$$

它显然可以被$2^{d}-1$整除。

9.11对$m=1$，2，3，…令

$$a_{3m-2}=2m^{-\frac{1}{3}},\quad a_{3m-1}=a_{3m}=-m^{-\frac{1}{3}}$$

即得。

关于这个问题的一个推广，请参考《美国数学月刊》53卷（1946），pp.283－284，问题4142。如果没有一点想法，没有一点关于解的预感和前兆，要想找到象（Ⅰ）和（Ⅳ）那样有帮助的附加限制看来是不可能的。

9.12如果p_1，p_2，…，p_l是不同的素数，而

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$，则

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_l-1)$$

9.13见习题1.47和§1.3（1），§2.5（2），§2.5(3)，§3.2和§3.1。

9.15为什么？下面是两个类似于习题9.6—9.10的问题。

（Ⅰ）比较下列两问题

A. 求$\sqrt[3]{100}$

B. 求$\sqrt{100}$

（Ⅱ）设$f(x)$和$g(x)$是给定的函数，比较下列两问题

A. 证明$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx$，

B. 证明　$f(x)\geqslant g(x)$　$(a\leqslant x\leqslant b)$。

来自何方？看来在多数情况下，辅助问题都（明显地或不

明显地）来自我们提到的那四个源泉。本书第一卷习题3.84提供了一个很有教益的例子，它综合利用了推广、特殊化和类比得出了解，见第一卷，*p*.97，*p*.191和*HSI*习题20，*pp*.238，241—242，252—253。

9.1，9.2，9.3，9.4，9.14是评注，不存在解的问题。

第 十 章

10.2 (1)

_ _ _ *E* _ _ _ _ _ _

_ _ _ *E* _ _ _ *A* _ _

_ *W* _ *E* _ _ _ *A* _ _

_ *W* _ *E* _ *H* _ *A* _ _

_ *W* _ *E* _ *H* _ *A* _ *T* *

(2)

$$\int\sqrt{x^7-x^4}\,dx$$

$$=\int x^2\sqrt{x^3-1}\,dx$$

$$=\int\sqrt{x^3-1}\,x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{x^3-1}\cdot 3x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{x^3-1}\,d(x^3-1)$$

10.1是评注，不存在解的问题。

---

* 全字是SWEETHEART，爱人。

第 十 一 章

11.2例如图1.1到1.6。另外还有由图7.8总结的图7.1到7.6。

11.3见习题11.2的解中所引的两个例子：在第一个里，可能是图1.6；在第二个里，可能是图7.3。

11.4见习题10.2。

11.5在图4.2中认出横坐标x_1，x_3，…，x_n是所求多项式$f(x)$的根。

11.6例如由图1.11变到图1.12。另外，在*MPR*第Ⅱ卷*p*.144中，由图16.2变到图16.3也是这种例子。

11.1，11.7，11.8，11.9，11.10，11.11是评注，不存在解的问题。

第 十 二 章

12.4

(1) 点*P*在两条给定的直线上；由作图，…

点*P*在一条给定的直线和一个给定的圆上；由作图；…

点*P*在两个给定的圆上；由作图，…

(2) 已给$\triangle ABC$两条边的长度和它们间的夹角，第三边为*AB*，…

已给$\triangle ABC$的边*BC*的长度和两个角，…

在直角三角形$\triangle ABC$中，给定两直角边*AC*和*BC*的长度，…

(3) 给定底和高，…

给定$\triangle ABC$的三边，…

〔还可以包括所有在（2）里所列的那些已知量集合〕

（4）给定底$\triangle ABC$的面积和由顶点D所引的高，…

12.5

（1）若$\triangle ABC\cong\triangle EFG$，…

若$ABFE$是一平行四边形，…

（2）若$\triangle ABG\sim\triangle EFG$，…

若$\angle ABC$与$\angle EFG$是一条直线截平行线所得的对应角，…

若$\angle ABC$与$\angle EFG$内接于同一圆且截取相同的弧，…等等；见习题8.8。

（3）如果图形$ABCD\cdots$与图形$EFGH\cdots$相似，所提到的点按顺序彼此对应，…

如果$AE\parallel BF\parallel CG\parallel DH$，且$A,B,C,D$共线，$E,F,G,H$也共线，…（本定理可以简单叙述成："由若干平行线所截得的各直线的对应部分成比例。"）

（4）在$\triangle ABC$中，若$\angle C<\angle B$，…。

12.6　见习题1.47，§2.5(2)，习题2.10，习题2.13，习题2.51，§14.6(3)，也可以参见HSI，pp.37—46，特别是p.38（类比，特别是§3）和MPR，第I卷，pp.45—46，及其他。

12.7　三角形中AB边上的中线通过任一平行AB的直线且被其他两边所截得的线段的中点。

（四面体中所考虑的那个截面是平行四边形。通过四面体一棱和相对棱的中点的平面产生出来的交是有用的。）

12.8　三角形的中线平分它的面积。

（对于四面体，所叙述的定理由卡瓦列里原理可得，因为问题中的平面平分在习题12.7所考虑的每一个截面的面积。）

12.9 一个三角形的内角的角平分线把对边分成与邻边成比例的线段。

12.1，12.2，12.3，12.10，12.11是评注，不存在解的问题。

第 十 三 章

13.1，13.2，13.3是评注，不存在解的问题。

第 十 四 章

14.1 近似值为中午12点过$9\frac{2}{3}$分。西部标准时间的正中午的经度是西经120°。

14.2 由

$$BD=BD_1,\ CD=CD_1$$

知点D属于两个球面的交，其一以B为中心以BD_1为半径，另一以C为中心以CD_1为半径。这个交圆所在的平面垂直于两球面中心的连线BC，于是它垂直于$\triangle ABC$的水平平面。因此D到水平平面的正交投影F落在通过D_1并垂直于BC的直线上，当然，D_2、D_3处于类似的地位。

14.3 点F是图14.1中用短弧表示的三圆的根心(定义见解析几何教本)。D_1F、和D_2F和D_3F是交于F的三条根轴。

14.4 在§14.4中的动作和感受。

14.11 下面是概略的回答

（7 a）应用平面三角和球面三角的余弦定律，即可证明不等式

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>\frac{-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}$$

其中$o<a<\pi$，$o<b<\pi$，$o<c<\pi$，并且a、b、c三段长组

成一个三角形。这个不等式通过适当运算即可导出（利用函数$\frac{\sin x}{x}$在0到π上随x单调增加而减少这一事实，而这一事实本身可以由几何的考虑予以说明）。

（7b）据连续性，一个“非常小”的球面三角形“几乎是平面”三角形。因此它“几乎全等”于它在平面上具有同样边长的像，因此对应的角“几乎”相等。

（7c）球的球极平面投影（从北极到赤道平面上）是保角的。

（7d）关于一个球带表面积的阿基米德定理产生出一个简单的保持面积映射。

（7e）从球心出发的半球到一个平面上的投影。

14.24　所求余式是一个次数不超过1的多项式，设为$ax+b$。如果问题已经解出来了，设商$q(x)$已求得，则有恒等式

$$x^3+x^5+\cdots+x^{17}+x^{19}=(x^2-1)\,q(x)+ax+b$$

在上面恒等式中，分别令$x=1$，$x=-1$即得

$$7=a+b\qquad -7=-a+b$$

由此可得　$a=7$，$b=0$，于是知所求余式为$7x$。

素数3，5，…，17，19颇引人注目但却无关大要。假如它们用任何七个奇整数去代替，所得的余式不变。在解这个题目以后，这件事看来是很显然的。但是当我们开头看到这个题目的时候，这些素数很可能会把我们引入歧途。

14.25

（1）πt^2

（2）$\pi t^2/4$

14.5 14.10，14.12—14.23，14.26—14.28是评注，不存在解的问题。

第 十 五 章

15.1 "给定周长，找出具有最大面积的图形"，这就是等周问题，它可以对不同类别的图形提出。这里是一些参考：

三角形：*MPR*，一卷，*p*.133，习题16；

矩形：*HSI*，*pp*.100—102。检查你的猜想2；

四边形：*MPR*，一卷，*p*.139习题41；

边数固定的多边形：*MPR*，一卷，*p*.178；

所有平面图形：*MPR*，一卷，*pp*.168—183。

对于雅各宾·斯坦纳（*Jacob Steiner*）的某些思想以及联系到物理问题的一个导引可见*E*.*F*.*Beckenbach*主编的《工程师用近代数学》丛书2，*pp*.420—441。

15.2 对于a、b和c的对称性，用因次检验。

15.3 弧的上部表示锐角三角形，弧的下部表示钝角三角形。

15.4 多面体（它的内部）中心投影到它的一个面W（"窗"）上。选择充分接近W的一个内点的多面体外的一点为投影中心，参阅*MPR*，一卷，*p*.53习题7。

15.5 $\sum F_n=F$，$\sum V_n=V$。

15.6 $\sum nF_n=\sum nV_n=2E$。

15.7 用习题15.5，习题15.6，§15.6（2）的定义和§15.6（8）最后的结果可得

$\sum(n-2)F_n \quad 2E-2F=\sum\frac{\alpha}{\pi}=2V-4$

15.8　由习题15.6和15.5

$$2E=\sum nF_n\geqslant 3\sum F_n=3F$$

$$2E=\sum nV_n\geqslant 3\sum V_n=3V$$

第一行中等式当且仅当每一个面是三角形时才成立；在第二行中的等式当且仅当每一顶点都正好由三条棱汇交时才成立。

15.9　第一个证明。这里先承认一个引理（以后由你自己证明）

引理：若一些量所组成的集合可以划分成为一些互不相交的子集，使得每一子集的量的平均值均小于a，则整个集合中量的平均值也小于a。

在引理中，若由<来表示的关系“小于”代之以关系$\leqslant$，$>$，$\geqslant$，则引理仍然成立。我们对（1）、（2）两次应用引理。

（1）在具有n条边的面里，角的平均值为

$$\frac{(n-2)\pi}{n}=\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi\geqslant\frac{\pi}{3}$$

（2）具有公共顶点的面角的和$<2\pi$，它们的个数$\geqslant 3$，因此它们的平均值$<\frac{2\pi}{3}$。

第二个证明：由§15.6（6）习题15.6以及15.8，所有面角的平均值为

$$\frac{\sum\alpha}{2E}=\frac{2\pi(E-F)}{2E}=\pi\left(1-\frac{F}{E}\right)\geqslant\frac{\pi}{3}$$

等式当且仅当所有的面为三角形时成立。

另一方面，由§15.6（8）中证明的欧拉定理以及习题15.8，又有

$$\frac{\sum\alpha}{2E}=\frac{2\pi V-4\pi}{2E}=\frac{\pi V}{E}-\frac{2\pi}{E}\leqslant\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{E}$$

15.10 第一个证明。在具有n条边的面中，当$n\geqslant 6$时，内角的平均值为

$$\frac{(n-2)}{n}\pi=\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi\geqslant\frac{2}{3}\pi$$

假设所有的面都至少有六条边，则所有面角的平均值将$\geqslant\frac{2}{3}\pi$，根据习题15.9这是不可能的。

第二个证明。由欧拉定理及习题15.8和15.6，

$$12=6F-2E+6V-4E$$
$$\leqslant 6F-2E$$
$$=\sum(6-n)F_n$$
$$12\leqslant 3F_3+2F_4+F_5$$

因此三个数F_3、F_4、F_5中至少有一个是正的。

15.11 （1）假若有一个面具n条边，这里$n>3$，则我们可以用对角线将它剖分为$n-2$个三角形，因此我们可以将它代之以$n-2$（它>1）个三角形的面而不改变V的值。因此F不可能是最大数，除非所有F个面均为三角形。

（2）由15.8，$2E\geqslant 3F$，这里等式当且仅当$F_4=F_5=\cdots=0$，$F=F_3$时成立。现在

$$F+V=E+2\geqslant\frac{3}{2}F+2$$

$$V\geqslant\frac{1}{2}F+2$$

$$F\leqslant 2(V-2)$$

和 $F-E+(V-2)\leqslant 3(V-2)$

等式当且仅当每一面为三角形时才成立。

15.12 借助于类比。将习题15.11的两种解法应用到(经过适当说明)眼下情形得到

$$V\leqslant 2(F-2),\quad E\leqslant 3(F-2)$$

其中等式当且仅当每一多面体的顶点正好由三条棱汇交时才成立。

所导出的不等式有很有趣的应用。例如，我们将求得的第二个不等式同习题15.8结合起来，即得

$$\frac{E+6}{3}\leqslant F\leqslant\frac{2E}{3}$$

对于$E=6$可得

$$4\leqslant F\leqslant 4$$

这就是四面体的情形。对$E=7$得

$$\frac{13}{3}\leqslant F\leqslant\frac{14}{3}$$

因此F不能为一整数！于是我们就推出不存在具有七条棱的凸多面体的结论——这是已被欧拉注意到的一个事实。

15.13

(1)	0	4	3	100	36
分别对于	四面体	六面体	八面体	十二面体	三十面体

(2)	$n(n-3)$	0	$1+\frac{n(n-3)}{2}$
分别对于	n—棱柱	n—棱锥	n—重棱锥

(3)	$\frac{(F-2)(F-4)}{8}$	$\frac{(F^2-5F+2)}{2}$	$\frac{(9F^2-42F+8)}{8}$
分别对于$n=$	3	4	5

5是不可能的，见习题15.10。所以5以后的问题是误人

（4）借助于F_n，参阅习题15.6，15.7

$$D = \frac{V(V-1)}{2} - E - \sum \frac{n(n-3)}{2} F_n$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\sum(2n-3)(n-2)F_n + \frac{1}{8}\left[\sum(n-2)F_n\right]^2$$

15.14

	（1）	（2）	（3）
$\sum\delta$	3π	2π	$\frac{5}{2}\pi$
$\sum w$	2π	0	π

15.15　在习题15.14观察到的情形中，两个和都朝同一方向变化——$\sum w$的改变是$\sum\delta$改变的两倍，且

$$2\sum\delta - \sum w = 4\pi$$

这个关系式对所有的四面体都对吗？

15.16　参阅习题15.19。

15.17　推广习题15.14中的情形（1）和（3）。两者的结果是同样的，参阅习题15.19。

15.18　参阅习题15.19。

15.19

	$2\sum\delta-\sum w$	F	V	E
四面体	4π	4	4	6
立方体	8π	6	8	12
n－棱锥	$(2n-2)\pi$	$n+1$	$n+1$	$2n$
n－棱柱	$2n\pi$	$n+2$	$2n$	$3n$
n－重棱锥	$(4n-4)\pi$	$2n$	$n+2$	$3n$

当$2\sum\delta-\sum w$增加时，既非V亦非L，而仅仅是F一直在随着增加。

15.20　$2\sum\delta-\sum w=2\pi F-4\pi$

为了证明，将对应于某一顶点的球面面积（立体角）用对应的由该顶点发出的那些棱的二面角来表示。记住具有角α、β和γ的球面三角形的面积是"球面角盈"$\alpha+\beta+\gamma-\pi$，由此推出一个关于球面多边形的面积的表达式，于是得到（利用习题15.5，15.6）

$$\sum w=2\sum\delta-\sum\pi(n-2)V_n=2\sum\delta-2\pi(E-V)$$

15.21　通常的回答是：等边三角形，正方形，n边正多边形。

15.22　通常所猜的形状与习题15.21的相同。

15.25　通常的回答：正四面体，正八面体，立方体。

15.26　通常的回答：正四面体，立方体，正八面体。

15.27　立方体的对角线是球面的直径。因此，若a是立方体一条棱的长度，则

$$(2r)^2=3a^2$$

（参阅HSI，PP.7—14，第I部分的主要例题）。所以所求体积是

$$a^3=\frac{8\sqrt{3}r^3}{9}$$

15.28　令A表示一个边长为r的等边三角形的面积，则所求体积为

$$\frac{2\cdot 6Ar}{3}=\sqrt{3}r^3$$

习题15.25中$V=8$的情形的回答，看上去似是合乎情理的猜测，但证明是错误的（但对$V=4$和6的情形，回答是正确的；对于第一种情形，可参阅MPR，一卷，P.133，习题17）。

15.29　令A为正八面体一个面的面积，h为一个面的高。则所求体积为（将八面体分成八个四面体）

$$V=\frac{8Ar}{3}=\frac{8r}{3}\frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

由对称性，球面在每个面的中心与面相切。因此，h在一个直角三角形中是一条斜边，它被这直角三角形的高（长为r）分成长为$\frac{h}{3}$和$\frac{2}{3}h$的两段，于是

$$\frac{h}{3}\cdot\frac{2h}{3}=r^2$$

消去h，我们得

$$V=4\sqrt{3}\,r^3$$

15.30　棱柱的体积是

$$6\frac{r^2}{\sqrt{3}}2r=4\sqrt{3}\,r^3$$

在回答习题16.26中$F=8$的情形时，我们几乎没有料到这一点（对$F=4$和6的回答是正确的）。

15.31

	F	V	E
立方体	6	8	12
六角重棱锥	12	8	18
正八面体	8	6	12
六角正棱柱	8	12	18

"击败"了正多面体的非正多面体，在元素个数上(在第一情形是V的个数，在第二情形是F的个数）符合于所指定的数字，然而在其他方面就比较复杂了（在第一种情形，具有较大的F和E，在第二种情形，具有较大的V和E）。这种情形能认为是不充足理由律的观察失败吗？

15.32 仅仅具有三角形面的那一类。

15.33 仅仅具有三棱顶点的那一类，见习题15.12。

15.34 在立方体和八面体之间，有一个互易关系。我们也可以在对应的与之匹敌的非正多面体之间观察到这个互易关系。参阅*MPR*, *vol*, 1, *P*.53，习题3和4。这就启示了一个猜测：在习题15.25和15.26的问题中对于具有同样已知数据的解之间，成立着同样的（拓扑的）互易关系。参阅习题15.32和15.33。

15.35 通常的回答与习题15.26的相同，整个情形也一样：对$F=4$和6通常的回答是正确的，对$F=8$则是不正确的。请参阅*MPR* *vol*.1, *P*.188，习题42。

15.36 （斯坦福大学1962)我们要找出关于直线$x=y$互相对称的两个全等椭圆的交点，两方程相减即得$x^2=y^2$。在四个交点

(6, 6) (−6, −6) (2, −2) (−2, 2)

中，两个符合于不充足理由律，两个不符。请参阅习题6.22。

15.37 经过适当的相减得$x^2=y^2=z^2$。在八个解

(1, 1, 1)(−1, −1, −1)(3, −3, −3)(−3, 3, 3)

(−3, 3, −3)(3, −3, 3)(−3, −3, 3)(3, 3, −3)

中，两个符合不充足理由律，六个不符。

15.38 （斯坦福大学1963)与习题15.37解同，但要得到

$x^2 - y^2 = z^2$却不如该题容易。

15.41　见习题15.42　15.53。

15.42　我们可以用这种核查特殊情形的方法去讨论任何“文字”题的结果，参阅§2.4(3)；习题2.61；*HSI*，你能核查这结论吗？2，*p*.60；*MPR*，*vol*.2，*pp*.5—7，§2，*pp*.13—14，习题3—7；也可见参考文献〔19〕，等等。

（2）在核查公式的特款时，我们就使自己更加熟悉了这个公式，更好地了解了它的“结构”。而且，这样一种讨论还可以向你说明若干重要的道理。我们可以了解到公式的价值在于它的普遍性和可应用性。此外，我们也可以学习到推理、归纳的论述——以验证它的特款来估计一般结论的真实性。简言之，教师如果忽视了如§15.4中所介绍的那种类型的讨论，就等于坐失了促使学生智力成熟的最好良机。

15.43　在图15.1中所示的区域中的每一点都代表了三角形的一个形状。〔用类似的方法用图去综观椭球和透镜的形状见G.Polya和G.Szegö著《数学物理中的等周不等式》(*Isoperimetric inequalities in mathematical physics*) *P*.37与*P*.40。因此图15.1可以使学生在科学中预习到图的某种用法，例如，在热力学中的指示图表。而且，图15.1还提供了线性不等式的几何表示的很好的练习。

15.44　这里是某些用十进位分数的试验可以得到的事实。

所有三种十进位表示的类型都代表了有理数，反过来，有理数的十进位展开必属于这三种类型之一。不同类型间的区别依赖于所代表的有理数分母中的素因子：按照所有的素因子都可以除尽10，或无一能除尽10，或有一个素因子能除

尽另一个除不尽10，决定了十进位小数是有尽的，或纯周期的，或混合的。〔在谈到有理数$\frac{a}{b}$的分母b时，我们假定$\frac{a}{b}$是既约的，即a和b没有大于1的公因子，且$b \geqslant 1$。我们不考虑两种明显的情形：即$b=1$（整数）的情形和那些可以表成有限展开的有理数的无限十进位展开情形。参阅*I.Niven*著《有理数与无理数》（*Numbers: rational and irrational*），*pp*.23—26，30—37〕。

周期的长度与分子无关。

假若分母为一素数P，则周期的长度是$P-1$的一个因子。（更一般地，周期的长度除尽$\phi(b)$，即不超过b并且与b互素的正整数的个数。对于混合展开你能说些什么呢？）

假如分母为一素数，周期长为一偶数，则在后半个周期中每一个数字与前半个周期中对应数字之和为9。（例如，在展开

$$\frac{1}{7}=0.\overline{142857} \quad 中$$

$$1+8=9 \quad 4+5=9 \quad 2+7=9$$

这个事实可以使我们在十进分数计算中节约许多工作）。

假如分母不能被3除尽，则周期中各数字之和可以被9除尽。例如

$$\frac{15}{14}=0.\overline{36585}$$

$$3+6+5+8+5=27$$

读者可以用例子来检验这些结论。假如应用数论中的某些知识（提高读者对于这一理论的兴趣也是我们的目的之一），则结论的证明也是不难的。

15.45 观察

$9\times11=99$，$27\times37=999$，$99\times101=9999$，

$271\times369=99999$

解释：因此，例如

$27\times0.037037\cdots=0.999999\cdots=1$

我们不应该不敢将小事情去与大事情比较，这样的比较是有好处的。我们所采用的从"观察"到"解释"、从看到一个规则看到内部的联系的步子，与从开普勒* 到牛顿的步子比较起来，当然是无限微小，但本质上却是类似的。参阅*MPR*，*vol*.1，*P*.87，习题15。

15.46 在习题15.44中，除去最后的结论（关于在周期中的数字和）外，其它每一结果在二进制里都有平行的结果。例如在二进位展开中

$$\frac{3}{5}=0.\dot{1}00\dot{1}$$

周期长是 $5-1$，且 $1+0=1$，$0+1=1$。

15.47 挑战性的算术工作，关于十进位分数和因子分解的实际练习。

显著的背景：实数概念（"关于$\sqrt{2}$或π的十进位展开是什么？"）数论的一个前奏。在一般的文化水平上：归纳推理的广阔机会，甚至是从经验基础出发构造一个深远理论的广阔机会。

---

* 开普勒（J.Kepler，1571—1630）德国天文学家，他从观察中总结出了著名的开普勒三定律，后来牛顿用万有引力加以概括并给出了严格的数学推导。

说得具体点：习题15.45为证实一个建立在观察上的猜测（依靠证明和对内部联系的了解）提供了一个特别简单明了的机会。

15.48　见习题15.49。

15.49　在图15.11中，在$t(n)$是横坐标为n的点的个数。我们发现对于1，2，4，8，16，$t(n)=1$。

当P为奇素数时，$t(p)=2$。

即使在有了这些重要的提示（并且经过了图15.11和图15.12的比较）之后，我们也还得作一些进一步的试验和思索才能发现下面这条规则：$t(n)$等于n的奇因子个数。读者应当去证明这条规则，他可以从下列的说明中求得帮助：

（1）习题15.49列出的梯形表示等价于方程

$$2n=r(r+2a-1)$$

（2）在两个因子r和$r+2a-1$中，一个是奇数，另一个是偶数，且奇因子必除尽n。

（3）两个因子中较小的一个是r，即行的数目。

（4）若n和r给定，则a是唯一确定的。

15.50　我们用习题9.12中定义的符号$\tau(n)$。规则可以区分五种情形：

（1）若n为奇数，但不是平方数，$S(n)=\frac{\tau(n)}{2}$。

（2）若n为奇数，且为平方数，$S(n)=[\tau(n)+1]/2$。

（3）若n为偶数，但不被4除尽，$S(n)=0$。

（4）若n可被4除尽，但不是平方数，$S(n)=\tau\left(\frac{n}{4}\right)/2$.

（5）若n可被4除尽且为平方数，$S(n)=[\tau\left(\frac{n}{4}\right)+1]/2$

为证明这个规则，注意

$$n=(2a+1)+(2a+3)+\cdots+(2a+2r-1)$$
$$=r(r+2a)$$

若n可被4除尽，注意

$$\frac{n}{4}=\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+a\right)$$

15.51　让我们比较一下现在这个计划与习题15.47里曾评价过的那个计划。在现在的情况里，问题有点人为，背景较贫乏，规律也更难于猜测。但是它的证明，虽然是挑战性的，却只需要很少的预备知识。我想这个计划是十分值得的。

图15.11给出了一个二元关系（在两个整数n与r之间，n是r个连续正整数之和）及它的图示的不寻常的、有教益的例子。至于图15.12，它表示一个熟知的更重要的二元关系，见莱卜尼兹《文集》，p.580。这些图表的研究可以在“二元关系”这个概念引进之前进行。

15.52　所求量不需应用积分计算即可求出（Cavalieri原理，Pappus法则），今将它们列出如下：

	重锥	球	圆柱	
V	$\frac{2\pi a^3}{3}$	$\frac{4\pi a^3}{3}$	$2\pi a^3$	$1:2:3$
S	$2\sqrt{2}\pi a^2$	$4\pi a^2$	$6\pi a^2$	$\sqrt{2}:2:3$
A	$2a^2$	πa^2	$4a^2$	$2:\pi:4$
L	$4\sqrt{2}a$	$2\pi a$	$8a$	$2\sqrt{2}:\pi:4$

X_A	$\frac{a}{3}$	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{x_A}{x_L}=\frac{2}{3}$
X_L	$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{\pi}a$	$\frac{3}{4}a$	
	$S=\sqrt{2}\frac{dV}{da}$	$S=\frac{dV}{da}$	$S=\frac{dV}{da}$	
	$L=\sqrt{2}\frac{dA}{da}$	$L=\frac{dA}{da}$	$L=\frac{dA}{da}$	

关于X_A/X_L的观察的一个推广（顺便提一句，它是在一次课堂讨论中发现的），可见*C.J.Gerriets*和作者写的一篇文章，刊于*American Mathematical Monthly*, *vol*.66, 1959, *PP*.875—879。

15.53 对$n=1, 2, 3, \cdots$

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$$

这里m是一个依赖于n的正整数。用数学归纳法去证明。见*American Mathematical Monthly*, *vol*.58, 1951, *p*.566.

15.23, 15.24, 15.39, 15.40, 15.54, 15.55是评注，不存在解的问题。

参 考 文 献

Ⅰ. 经典部分

[1]Euclid, Elements.

[2]Pappus Alexandrinus, Collectio, F.Hultsch 编, 1877年, v.2, pp.634—637.

[3]R. Descartes, œuvres, Charles Adam与Paul Tannery 编.

[4]G. W. Leibnitz, (1) Mathematisehe Schriften, C. I. Gerhardt 编.

(2) Philosophische Schriften, C. J. Gerhardt 编。

(3) Opuscules et fragments inédits, Louis Couturat 整理。

[5]Bernard Bolzano, Wissenschaftslehre, 第二版, 1930, v.3, pp.293—575。

Ⅱ. 近代部分

[6] E. Mach, Erkenntnis und Irrtum, 第四版,莱比锡, 1924; pp. 251—274及其它地方。

[7] J. Hadamard, Leçons de Géométrie plane, 巴黎, 1898; 附录A, 关于几何上的方法(有中译本)。

[8]F. krauss, Denkform mathematischer Beweisführung, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, v.63 (1931), pp.209—222。

[9]Werner Hartkopf, Die Strukturformen der Probleme, 博士论文，柏林，1958。

[10]I. Lakatos, Proofs and Refutations, The British Journal for the Philosophy of Science, v. 14(1963), pp. 1—25, 120-139, 221-245。

[11]Franz Denk, Werner Hartkopf, 和George Polya, Heuristik, Der Mathematikunterricht, v. 10(1964), 第一部分

Ⅱ. 作者的有关工作

书

[12]Aufgaben und Lehrasätze aus der Analysis, 与G. Szegö合著，英译本Problems and Theorems in Analysis, v.1, 1972, v.2, 1976, 柏林。

[13]How to Solve It, 第二版，1957(缩写HSI)。

[14]Mathematics and Plausible Reasoning, 普林斯顿, 1954。两卷本, Induction and Analogy in Mathematics, (v.I) 和Patterns of Plausible Inference (v.Ⅱ) (缩写MPR)。

[15]Mathematical Methods in Science, 收入 Leon Bowden所编的讲义，见School Mathematics Study Group Studies in Mathematics, v.Ⅺ.

文章

[16] Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. Schweizerische Pädagogische Zeitschrift, 1919, 11pp.

[17] Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben ?Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 63, 1932, pp. 159-169.

[18] Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben ?Acta Psychologica, 4, 1938, pp. 113-170

[19] Die Mathematik als Schule des Plausiblen Schliessens. Gymnasium Helveticum, 10, 1956, pp.4-8. 重印于Archimedes, 8, 1956, pp.111-114. 英译文Mathematics as a subject for learning plausible reasoning. The Mathematics Teacher, 52, 1959, pp.7-9.

[20] On picture—writing. American Mathematical Monthly, 63, 1956,pp.687-697.

[21] L'Heuristique est-elle un sujet d'étude raisonnable ?La Méthode dans les Sciences Modernes ("Travail et Méthode",numéro hors série) 1958. pp.279-285.

[22] On the curriculum for prospective high school teachers.American Mathematical Monthty, 65. 1958, pp. 101-104.

[23] Ten Commandments for Teachers.Journal of Education of the Faculty and College of Eudcation, Vancouver and Victoria, nr.3,1959.pp.61 69.

[24] Heuristic reasoning in the theory of numbers,

American Mathematical Monthly,66,1959,pp.375-384.

[25]Teaching of Mathematics in Switzerland, American Mathematical Monthly, 67, 1960,pp.907 914.The Mathematics Teacher, 53,1960,pp.552-558.

[26]The minimum fraction of the popular vote that can elect the President of the United States.The Mathematics Teacher,54,1961,pp.130-133.

[27]The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law, The Scientist Speculates,I.J.Good编, 1962, pp.352 356.

[28]On Learning,Teaching,and Learning Teaching. American Mathematical Monthly,70,1963,pp.605 619.

Ⅳ 习题

[29]本书部分习题取自斯坦福大学数学竞赛试题（Stanford University Competitive Examination in Mathematics.）[它们在解答部分已明确指出，例如2.45（斯坦福大学1959）]。该试题（某些带解答）多数发表在 The California Mathematics Council Bulletin.

[30]The USSR Olympiad Problem Book, Д. O. щклярский,H.H.ченцов,И.M.ячлом俄文原著，I. Sussman 英译。旧金山，1962。

[31]Hungarian problem Book, New Mathematical Library, v. 11-12.

V. 关于教学

[32]On the Mathematics Curriculum of the High SchooL, American Mathematical Monthly, 69, 1962, pp.191-195.

[33]Martin Wagenschein, Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht, Der Mathematikunterricht, 8. 1962, part 4.

[34]A. I .Wittenberg, Bidung und Mathematik, Stuttgart, 1963.

[35]A. I .Wittenberg, Soeur Sainte-Jeanne-DelFrance, 和F.Lemay, Redécouvrir Les mathématiques, Neuchâtel, 1963.

[36]Roy Dubisch, The Teaching of Mathematics, New York, 1963.

附　　录

补充习题

习题1.19.1，1.19.2，和1.19.3按顺序放在习题1.19后面，习题2.27.1放在习题2.27后面，以此类推。

1.19.1　给定α，r，R作三角形。

〔你能想出另外的更合适的已知量去确定未知量吗？你能只改变一个已知量代之以一个更合适的已知量吗？〕

1.19.2　给定a，h_a，r作三角形。〔你能从已知量导出一些有用的东西吗？〕

1.19.3　给定a，r，$a+b+c$，作三角形。

2.27.1　丢番图活了多大年纪？这个问题据说是题在丢番图的墓志铭上。原文是诗。（见范德瓦登*，《科学的觉醒》，p.278。）

这里埋葬着丢番图。如果你解开了他的巧计，这块石碑会告诉你他的年纪。童年时代占了上帝赐给他的一生中的六分之一；又过了十二分之一以后，他开始长出了胡子；再过一生的七分之一他结了婚。婚后五年生了一个儿子。不幸他的爱子只活了他父亲一半的年纪就过早地死去。丧失了爱子之后他有四年都在数学中寻求安慰，随后也结束了他的尘世生涯。

---

*范德瓦登(van der Waedan)德国数学家，近世代数的奠基人。

2.35.1　从某三角形的一个顶点引高线，角平分线和中线。上述三条线把顶角α分为四个等分，求角α。

〔你可能也希望知道这个三角形的形状。注意条件的每一部分。〕

2.40.1　在直角三角形中，给出了斜边的长c及面积A。在三角形的每边上，向外作一正方形，考虑包含这三个正方形的最小凸图形（即由一个紧绕着它们的橡皮带所围成的图形），它是一个六边形（它是不规则的，与每一正方形有一公共边，剩下的三条边中显然有一条长度是c）。

求此六边形的面积。

2.40.2　在一个直角三角形中，c是斜边的长度，a和b是其他二边的长，d是内切圆的直径。证明

$$a+b=c+d$$

〔这个问题可以换一种叙述：给定a，b和c，求d。〕

2.50.1　下面是一个类比于习题2.45的立体几何问题。

从把三维空间剖分成相等的立方体开始。

第一个模型：每一个立方体都伴随着一个与它的六个面相切的一个同心球。

第二个模型："每一个第二类"立方体都伴随着一个与它的十二条棱都相切的同心球（即两个立方体有一个公共面，则一个包含而另一个不包含这个球的球心）*。

对每一个模型计算包含在球内的空间的百分比。

---

* 所谓第二类立方体是这样的立方体，它有一个同心球突出于六个面外与十二条棱相切，而四周的六个立方体则没有这样的同心球，属于第一类立方体。整个空间由这两类立方体混杂砌成。

2.52.1　一块底面为正方形的直立棱柱状蛋糕，顶上和四周（即四个侧面）都被糖衣裹住。棱柱的高是它的底面边长的$\frac{5}{16}$。把蛋糕切成九块，使每一块都有等量的蛋糕和糖衣，其中一块是一个底面为正方形的直立棱柱，它只在顶面上有糖衣：计算它的高与底面的边的比，并对所有九块都作一个清楚的描述。

2.55.1　四面体有五条棱的长都是a，第六条棱的长是b。

（1）将此四面体的外接球半径用a和b表示出来。

（2）你怎样利用（1）的结果实际确定一个球面（透镜的）的半径。

2.55.2　碳原子有四价，我们把它们在空间中的指向画成对称的。从正四面体的中心到四个顶点引直线，求它们中任意两条间的夹角α。

2.55.3　光度计一盏灯L有I支光，另一盏灯L'有I'支光，它们间的距离是d。将一扇屏风放在两盏灯之间，它与两灯之间的联线垂直，并且使得从两边照过来的亮度相等，求屏风的位置。

（如果点光源L是I支光，与L距离为x并与此距离垂直的曲面上的亮度为$\frac{I}{x^2}$。为彻底了解这一点，你应考虑两个以L为中心的球；一个半径是1，另一个半径是x。）

3.10.1　抢救　船沉了——也许船里有某些财宝还值得打捞。你的计划失败了——也许里面有一个想法还值得保留。

在§3.2 我们计算S_2（§3.3的记号）的第一个计划

很遗憾地失败了；当我们试着把对S_1所用的方法应用到S_2上时，就完全无法再做。问题出在哪里呢？也许我们用得过于生硬了。那么该怎样不生硬地去用它呢？作某些修改后再用它呢？还是把它用于某些别的情况？

这样的考虑可以引出一些试验，很自然地我们要把这种方法试用于S_k。这种方法的基本要点是什么？这就是把与两个端点距离相等的两项组合在一起：一项到某个端点的距离与另一项到另一个端点的距离是一样的。S_k里的j^k和$(n-j)^k$就是这样的项。如果加法不行，可能就作减法——最后我们可以采取下列组合：

$$(n-j)^k-(-j)^k=n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}j+\binom{k}{2}n^{k-2}j^2-\cdots+$$

$$(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}nj^{k-1}$$

依次对$j=0,1,2,\cdots,n-1,n$把它写出来：

$$n^k-(-1)^k0^k=n^k$$

$$(n-1)^k-(-1)^k1^k=n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}\cdot1+\binom{k}{2}n^{k-2}\cdot1^2$$

$$-\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}n\cdot1^{k-1}$$

$$(n-2)^k-(-1)^k2^k=n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}\cdot2+\binom{k}{2}n^{k-2}\cdot2^2$$

$$-\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}n\cdot2^{k-1}$$

…………………

$$1^k-(-1)^k(n-1)^k=n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}\cdot(n-1)+$$

$$\binom{k}{2}n^{k-2}\cdot(n-1)^2-\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}n\cdot(n-1)^{k-1}$$

$$0^k - (-1)^k n^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1} \cdot n + \binom{k}{2} n^{k-2} \cdot n^2$$

$$- \cdots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n \cdot n^{k-1}$$

相加，并应用§3.3的符号（但用S_0^1去代S_0+1）我们得

$$S_k[1-(-1)^k] = n^k S_0^1 - \binom{k}{1} n^{k-1} S_1 + \binom{k}{2} n^{k-2} S_2$$

$$- \cdots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} n \cdot S_{k-1}$$

考虑一下此结果在$k=1$，2，3的情形，然后试估计一下一般情形。

3.40.1 把正整数n写成正整数和的方法有多少？把n写成某些指定的项数t（都是正整数）的和的方法有多少？我们把两个项的次序不同的和看成是不同的。

在探讨这个问题时，当然得从试验开始，并且得把试验所得到的资料都整齐地排列起来。下面是对$n=4$和$n=5$所找到的和：

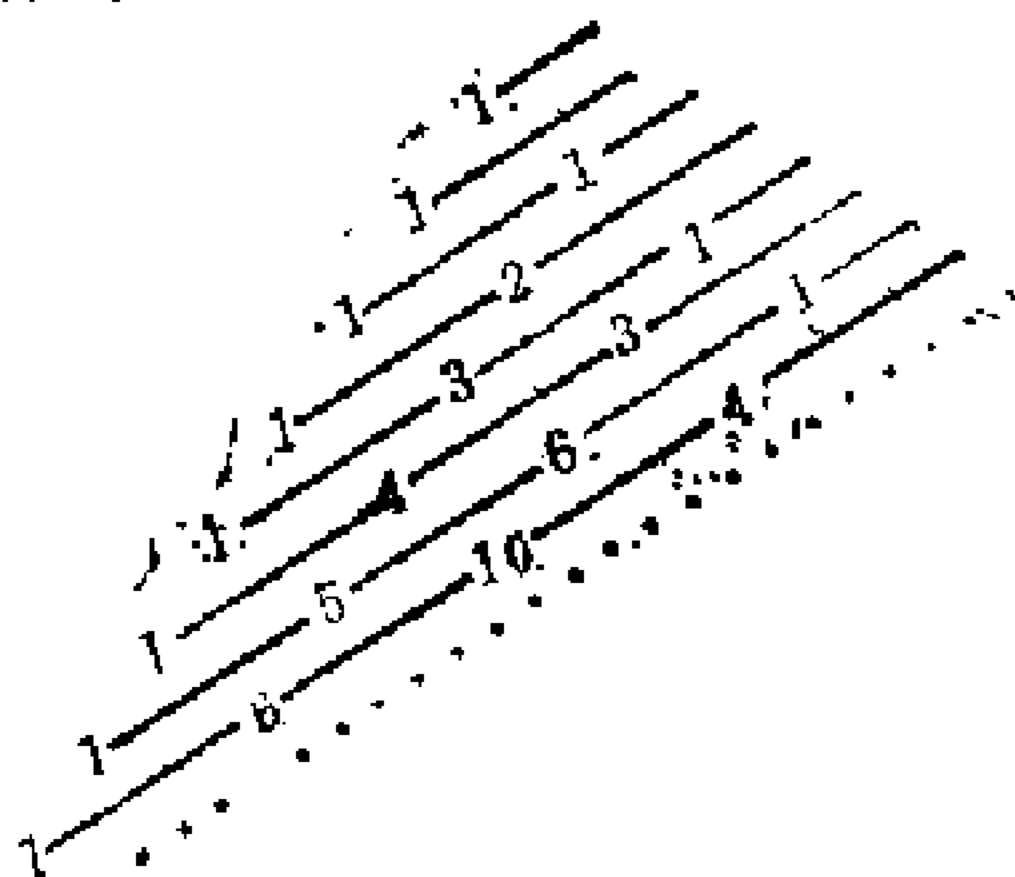
4	1+3	2+1+1	1+1+1+1	
	2+2	1+2+1		
	3+1	1+1+2		
5	1+4	3+1+1	2+1+1+1	1+1+1+1+1
	2+3	1+3+1	1+2+1+1	
	3+2	1+1+3	1+1+2+1	
	4+1	1+2+2	1+1+1+2	
		2+1+2		
		2+2+1		

你注意到这儿有一个模型吗？

证明你的猜想！

能有一个几何图形帮助你吗？

3.40.2　费波那契数



图A3.40.2　用一种斜线求费波那契数的方法

把图$A3.40.2$中沿斜线的数加起来，我们就得到费波那契数序列

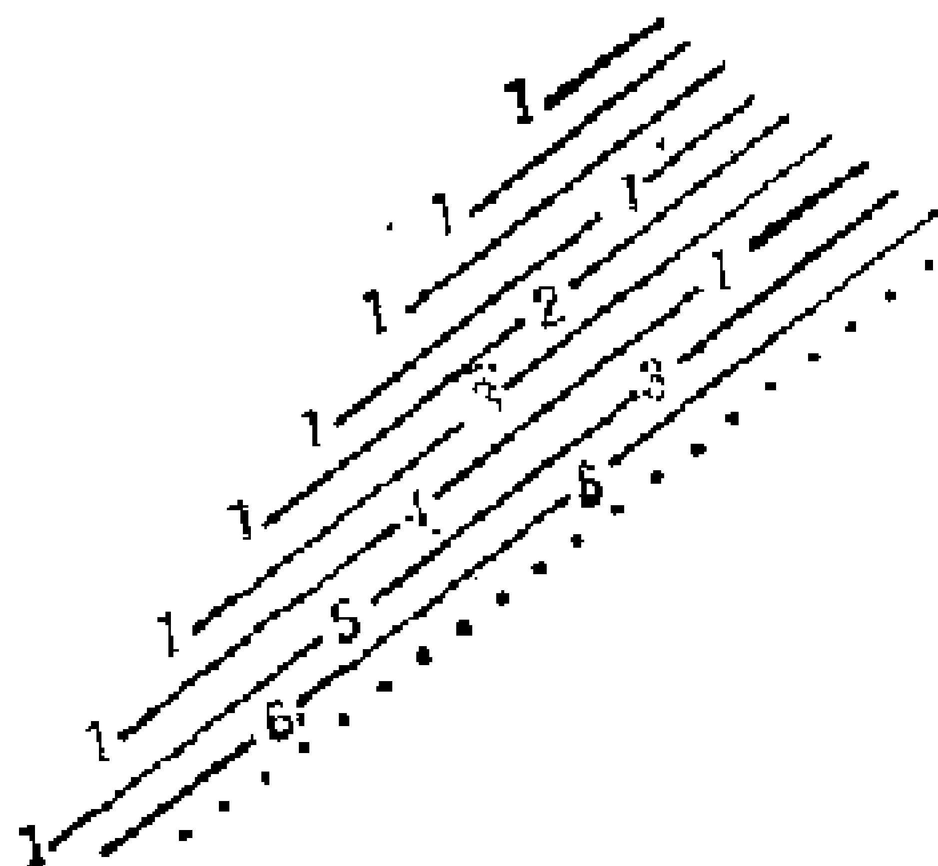
1，1，2，3，5，8，13，21，……

我们设F_n是它的第n项，即第n个费波那契数，于是$F_1=1$　$F_2=1$，$F_8=21$。

（1）用二项式系数去表出F_n。

（2）证明对$n=3$，4，5，…有

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$



图A3.40.3　更陡

3.40.3　（续）数列

1，1，1，2，3，4，6，9，13，…也可以类似地生成（见图$A3.40.3$）。设G_n是它的第n项，则$G_9=13$。

（1）用二项式系数去表出G_n。

（2）证明对$n=4$，5，6，…有

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-3}$$

（3）推广。

*3.60.1　考虑下表

$$
\begin{aligned}
1\cdot1 &= 1\\
1\cdot3-2\cdot2+3\cdot1 &= 2\\
1\cdot5-2\cdot4+3\cdot3-4\cdot2+5\cdot1 &= 3\\
1\cdot7-2\cdot6+3\cdot5-4\cdot4+5\cdot3-6\cdot2+7\cdot1 &= 4
\end{aligned}
$$

根据这些例子猜测一般的规律，用适当的数学符号表示它并证明之。

3.65.1　如果x和n是正整数，则表达式

$$\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)\cdots[x^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!\cdot n}$$

为一整数。

*3.88.1　习题3.86有另一解法：利用微分在某些方面就更为简单。试找出此解法。

*3.88.2　考察

$$
\begin{aligned}
1\cdot1+2\cdot1 &= 3\\
1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 &= 8\\
1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3+4\cdot1 &= 20\\
1\cdot1+2\cdot4+3\cdot6+4\cdot4+5\cdot1 &= 48\\
1\cdot1+2\cdot5+3\cdot10+4\cdot10+5\cdot5+6\cdot1 &= 112
\end{aligned}
$$

根据这些例子猜测一般的规律，用适当的数学符号表示它并证明之。

4.15.1　用递归公式对$k=2, 3, 4, \cdots$定义y_k如下：

$$y_k=\frac{y_{k-1}+y_{k-2}}{2}$$

取

$$y_0=a,\qquad y_1=b$$

试用a，b和k去表出y_k。

5.19.1　研究习题5.19的解，我们可注意到所找到的数有一个简单的解释：它表示从$n+v$个匣子里挑出v个匣子的不同的挑法个数。既然是这样，我们应该能用一种简单的论证把这一事实看出来。

设想这$n+v$个匣子排成一列——如果你愿意的话，可以让每一个匣子占有$0\leqslant x\leqslant n+v$里一个长度为1的子区间。怎样做才能使问题跟从$n+v$个匣子中选出$n$个匣子联系起来？

6.13.1　证明数

11，111，1111，11111，…

中没有一个数是整数的平方。

6.17.1　“你有几个孩子？他们多大啦？”客人——一位数学教师问。

“我有三个男孩，”史密斯先生说：“他们年龄的乘积是72，他们年龄的和是门牌号数。”

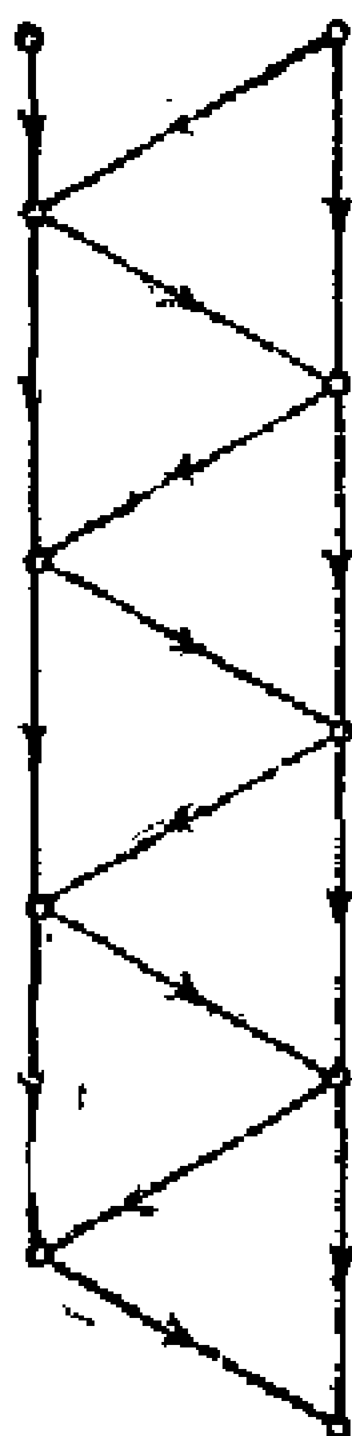
客人到大门口去看了号数，回来说：“这个问题是不确定的。”

“是的，是那样，”史密斯先生说：“但我仍希望那个最大的男孩能有一天在斯坦福大学的数学竞赛中获胜。”

求出这些男孩的年龄，并叙述你的理由。

7.2.1　图$A7.2.1$中的图表有一个历史上有趣的解释。

你能认出它吗？


图A7.2.1　在哪里见过？

9.11.1　任一解都行　证明存在一对发散级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

满足

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>0,$$
$$b_1>b_2>b_3>\cdots>0$$

使得级数

$min(a_1,b_1)+min(a_2,b_2)+\cdots+min(a_n,b_n)+\cdots$ 收敛。其中$min(a,b)$ 表示数a与b中较小者.

[并不要求把所有满足上述条件的级数对都找出来，而只要求找一对（任一对）。因此，可以应用习题9.11所引莱卜尼兹的劝告：把探索范围变窄而不增加你的困难。]

12.2.1　证明下列命题：如果三角形的一边小于其他二边的平均值（算术平均值）则它的对角也小于其他二角的平均值。

（主要部分是什么？用数学语言把它们表示出来，利用通常的三角符号。）

12.5.1　有关的知识　四边形的四条边是a，b，c，d，面积为A，它既内接又外切于圆（内接于一圆，外切于另一圆），则

$$A^2 = abcd$$

[证明这个命题是易还是难取决于你是否知道某个有关的命题。]

12.9.1 你知道一个有关的命题吗？解下列三个未知量x，y和z的方程组（a，b和c是已知的）：

$$x^2y^2+x^2z^2=axyz$$
$$y^2z^2+y^2x^2=bxyz$$
$$z^2x^2+z^2y^2=cxyz$$

（这里是一个三个未知量三个方程的方程组。这一类方程组中最熟知的是线性的：我们可以把上面这个方程组"线性化"吗？我们可能会想起下列形式：

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{a}{xyz}$$
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{b}{xyz}$$
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{c}{xyz}$$

如果我们把xyz看作是已知的（如意算盘），则这个方程组关于$\frac{1}{x^2}$，$\frac{1}{y^2}$，$\frac{1}{z^2}$就是线性的。解的形式应为：

$$\frac{1}{x^2}=\frac{A}{xyz}$$

于是展现出一个新的前景——你能看出来吗？）

12.9.2 返回到定义 我们考虑三个以F，F'和V为圆心的圆f，f'和v。圆f和f'是固定的，而v是变圆，f'和v能在f内，但它们彼此则在对方的外边。证明命题，如果变圆v与圆f和f'都相切，则它的圆心V的轨迹是一个椭圆。

[椭圆是什么？]

12.9.3 探查邻近地区 你喜欢上面的问题(习题12.9.2)吗？你喜欢它的解吗？那么考查一下它的邻近地区 你已经在这棵树上找到了一个熟透的苹果，可能还有更多。

把问题加以变化：你可以考虑一个推广，或者考虑特殊的情形，极限的情形，相似的情形。这是一个可以发现某些有趣结果的机会，同时也是学习怎样做研究工作的机会。

读者应找出V在下列改变了的条件下的各种轨迹：

（1）特殊化 f和f'是同心圆。

（2）极限情形 设f是一定直线，f'是一定点；v和f相切并通过$f'=F'$。

（3）相似 圆f和f'彼此在对方的外边，v以同一方式与f和f'相切，即v和f，f'或都外切或都内切。

（4）（3）的极限情形 设f和f'是两个不同的点，v通过此两点。

试考虑其他特殊的，极限的或相似的情形。

14.1.1 闰年 常年有365天，闰年有366天。不是百年的年份n当且仅当n是4的倍数时是一个闰年。一个百年的年份（即n是100的倍数）是一个闰年，当（且仅当）n是400的倍数。于是1968和2000是闰年，1967和1900不是闰年的这些规则是教皇格列高里十三世*建立的。

到目前为止，我们所说的“文明”年必须由整的天数组成。天文年则是地球绕太阳公转一周所用的时间。如果格列

---

* 教皇格列高里十三世 (Pope Gregorg X.II, 1502- 1585) 于1572—1585任教皇。

高里的规则精确地与天文年符合，那么天文年的长将是多少？

15.2.1 [§15.5]设a，b和c表示三角形三边的长度，d是的长度为c的边所对的角的角平分线到c边的长度。

（1）把d用a，b和c表示出来。

（2）对图15.2—15.5描述的四种情形检验一下所得的表达式。

15.52.1 一个稍高于中学水平的研究课题，它也可以提出来作为教师学习班学期论文的一部分。

三维空间的一个点（x，y，z），按通常的方法用它的三个直角坐标x，y，z来表示。

我们考虑四个点集C，O，I和H。每个集合都由一组不等式（也可能是一个不等式）刻划：坐标同时满足组中所有不等式的那些点（也只有那些点）属于这个集合。

下面是确定这四个集合的四组不等式：

(C)	$\|x\|\leqslant 1$	$\|y\|\leqslant 1$	$\|z\|\leqslant 1$
(O)	$\|x\|+\|y\|+\|z\|\leqslant 2$		
(I)	(C) 和 (O) 中所列的四个不等式		
(H)	$\|y\|+\|z\|\leqslant 2$	$\|z\|+\|x\|\leqslant 2$	
	$\|x\|+\|y\|\leqslant 2$		

仔细描述出这四个集合的几何性质，指出所有的有关特征（不要忘记对称性），把它们清楚地排成一个适当的表格。

描述这四个图形之间的关系。

求出每个图形的体积V和表面积S。

这一工作提示你作何推广？

（硬纸盒模型在作题时可能会有帮助。参见习题2.50.1，

HSI, *p*.235, 习题8。）

15.53.1　再注意

$$2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^2=\sqrt{49}-\sqrt{48}$$

$$(2-\sqrt{3})^3=\sqrt{676}-\sqrt{675}$$

$$(2-\sqrt{3})^4=\sqrt{9409}-\sqrt{9408}$$

试推出一般情形，并证明你的猜想。

习题解答

1.19.1　从外接圆的中心作到a边的一个端点的连线及到a的一条垂线，于是得到一个以R为斜边，α为一角，α所对的股为$\frac{a}{2}$的直角三角形。在我们的情形，R和α已给，这样我们就能作出a。利用习题1.19，根据这样求出的a和原来给定的α和r便可以作出所要求的三角形。

1.19.2　连接内切圆中心和三个顶点的直线把所求三角形分为三个三角形。考虑其面积可得

$$\frac{1}{2}r\ (a+b+c)=\frac{1}{2}ah_a$$

于是由给定的a，h_a，r可作出周长$a+b+c$，这样便把所提的问题化为习题1.19.3。

1.19.3　从内切圆的中心连一线到顶点A并作一垂线到边b(或c)。于是得到一个以$\frac{\alpha}{2}$为锐角，$\frac{\alpha}{2}$所对的股为r的直角三角形。设x为另一股，则

$$a+b+c \quad 2a=2x$$

因此，可以先由给定的$a+b+c$和a作出x，然后从x和给定的r可作出α。再应用习题1.19，用求出的α和给定的a和r便可作出所求的三角形。

2.27.1　设x为丢蕃图的年龄。由

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

可得　$x=84$。

2.35.1（参见美国数学月刊，第66卷，1959，p.208。）设β是其余两角中的较大者，γ是较小者。如果β是一锐角，则从A引出的五条线（按习题1.7的符号）依次为c，h_a，d_a，m_a，b。在h_a分出来的两个直角三角形中

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}, \qquad \gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\alpha$$

在m_a分出来的两个三角形中

$$\frac{\frac{a}{2}}{m_a}=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\alpha\right)}\quad\frac{\sin\frac{3}{4}\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$$

于是

$$\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} \quad \sin\frac{3}{4}\alpha\cos\frac{3}{4}\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \quad \sin\frac{3}{2}\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2} \quad \pi-\frac{3}{2}$$

$$\alpha \quad \frac{\pi}{2}$$

2.40.1　（斯坦福大学1965）这个六边形由三个正方形

和四个三角形组成，而且这些三角形有相同的面积A。因此六边形的面积是$2C^2+4A$。

2.40.2　（斯坦福大学1963）把给定的直角三角形分成三个三角形，它们有一个共同的顶点——内切圆的中心。比较面积

$$\frac{d}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{ab}{2}$$

可得

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}=\frac{2ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=a+b-c$$

2.50.1　分别为$100\cdot\frac{\pi}{6}$和$100\pi\frac{\sqrt{2}}{6}$，或近似的52.36%和74.07%。参见习题15.52.1的解，节（6）部分。

2.52.1（斯坦福大学1964）设C是所给的棱柱（蛋糕）而D是所求的棱柱（即只有顶上有糖衣的）。我们假设

s和h

x和y

分别是C和D中底面的一边和高。决定D的条件可用以下方程表示

$$x^2=\frac{s^2+4sh}{9}$$

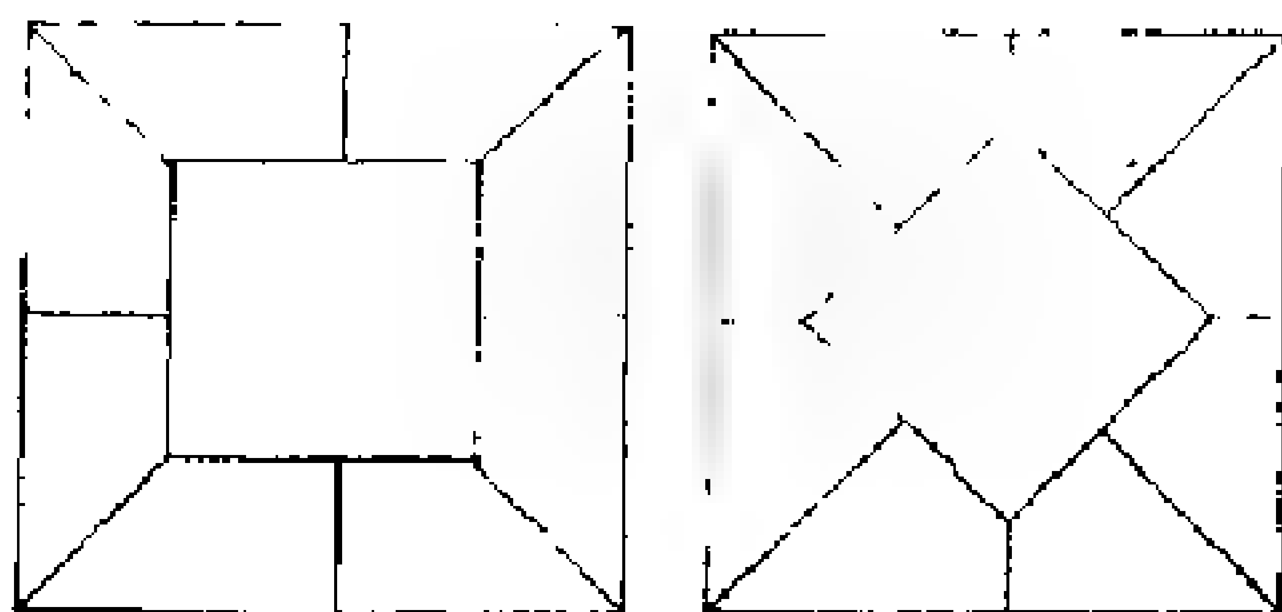
$$x^2y=\frac{s^2h}{9}$$

$$h=\frac{5s}{16}$$

由此得出

$$x=\frac{s}{2},\quad y=\frac{5s}{36},\quad \frac{y}{x}=\frac{5}{18}$$

从C中切出D，使得它的顶部的边或对角线与C的顶部的边是平行的，同时使得棱柱C和D的四个对称面是相同的。正是这四个对称面把C剩下的部分分成了八块，每一块都与D有等量的体积和等量的"糖衣"。



图AS2.52.1 九份蛋糕*

2.55.1 （斯坦福大学1962）设C表示外接球的中心，r表示外接球的半径。有两个"关键的辅助平面图形"：即这个四面体的两个横截面，一个通过棱b和相对的棱的中点，另一个通过后面这条棱和棱b的中点。这两个横截面是互相垂直的，它们的交线d连接上面所说的那两个中点并包含了点C。

设x是从C到b的垂直距离（它的另一端点是b的中点），这个四面体有两个面是等边三角形，设它们中之一的高是h；于是

* 此图为译者所加。

$$h^2=\frac{3a^2}{4}$$

从这两个横截面上的直角三角形中我们得出方程

$$h^2=d^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$r^2=x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$r^2=(d-x)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

现在我们有四个方程用来决定我们的四个未知量：h可以立即由第一个方程得出，然后由第二个可得出d。求出d后就能很快求出x（后两个方程相减）。最后得

$$r^2=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{4a^2-b^2}{3a^2-b^2}$$

（检验：如果$b\to a\sqrt{3}=2h$，则$r\to\infty$。）

可能的应用：两个以a为边的刚性等边三角形，它们的一条公共边象绞链一样，可以彼此互相倾斜使得所有四个顶点在一个凹的球面上，于是通过测量b便可得到r。凸透镜则要求某些更复杂的机械装置。

2.55.2　如果在习题2.55.1中，取$a=b$，则四面体变成正四面体，

$$r^2=\frac{3a^2}{8}$$

且

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{r}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha=109°28'$$

它就可以看成碳原子（如在CH_4中）对称的四个价中任意两个向的夹角。

2.55.3　设x是从L到屏风的垂直距离。则

$$\frac{I}{x^2}=\frac{I'}{(d-x)^2}$$

于是

$$x=\frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I}+\sqrt{I'}}$$

（实际问题中稍有不同：我们给了I，另外测量了d和x，于是我们可由此确定I'。）

3.10.1　下面是开头的三个特殊情形：

$$2S_1=n(n+1)$$
$$O=n^2(n+1)-2nS_1$$
$$2S_3=n^3(n+1)-3n^2S_1+3nS_2$$

$k=1$的情形可得出S_1的值，这个方法与"小高斯的方法"（§3.1）只稍微有点不同。

$k=2$的情形间接地也得出S_1。

$k=3$的情形若S_1和S_2已知，则可得出S_3。

一般地，当k是奇数时，用这个结果可以由前面的S'_0，S_1，S_2，……，S_{k-1}去计算出S_k，但当k是偶数时则不行。这就在某种程度上说明了（是利用一个修改了的推广去说明的）为什么在§3.1中对S_1适用的方法在§3.2里对S_2就不适用了。此外，通过把这一结果与§3.2—§3.4和习题3.6—3.10进行比较，我们还可以学到点东西——有的人说不定日后会在某处用上它。

3.40.1　我希望读者也考虑一下$n=1,2,3$的情形。

猜想：有$\binom{n-1}{t-1}$种不同的方法把n表为t个正整数的和。

$t=1$的情形就是n。$t=2$的情形十分显然是$n-1$。作为一个一般的证明，在数直线上考虑区间$0\leqslant x\leqslant n$和它上面的点$x=1,2,3,\cdots\cdots,n-1$。从这$n-1$个点中任意选出$t-1$作为分点，我们就把区间分成了t个依次的长度为整数的子区间，这样我们就把n表成我们所要求的那种t个正整数的和。

3.40.2　就你所能及的n，检查图A3.40.2上的关系。

（1）$F_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots\cdots$

（2）由递归公式可得，见§3.6（2）。参考习题4.15。

3.40.3

（1）$G_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-3}{1}+\binom{n-5}{2}+\cdots\cdots$

（1）由递归公式可得。

（2）改变斜度可得到一个依赖于某个参数（斜度，或某个正整数q）的序列y_1，y_2，y_3，…，它满足下列递归公式（差分方程，见习题4.14）

$$y_n=y_{n-1}+y_{n-q}$$

在$q=1$的形情，斜度是0，而

$$y_n=2y_{n-1}$$

见习题3.32。

3.60.1 猜想：

$$1\cdot(2n-1)-2(2n-2)+3(2n-3)-\cdots+(2n-1)\cdot 1=n$$

证明：考虑下列乘积中x^{2n-2}的系数

$$(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)$$
$$=(1-x)^{-2}(1+x)^{-2}$$
$$=(1-x^2)^{-2}$$
$$=1+2x^2+3x^4+4x^6+\cdots+nx^{2n-2}+\cdots$$

3.65.1 （参见斯坦福大学1963）因为

$$\frac{x}{n}=\frac{(x+n)+(x-n)}{2n}$$

所以该表达式等于

$$\binom{x+n}{2n}+\binom{x+n-1}{2n}$$

而二项式系数是整数。

3.88.1 对下式两边微分

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

习题3.87和3.88也可以类似地去处理。

3.88.2 猜想：

$$1\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}$$
$$+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}=(n+2)2^{n-1}$$

（得出这个猜想的困难在于认出乘积3·1，4·2，5·4，6·8

7·16。）

证明：先对下列等式两边微分

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^{n+1}$$

$$=x(1+x)^n$$

然后令$x=1$。

4.15.1 方程

$$2r^2-r-1=0$$

的根是$r=1$和$r=-\frac{1}{2}$。因此，由习题4.14

$$y_k=c_1+\frac{(-1)^k c_2}{2^k}$$

利用初始条件（$k=0$和$k=1$的情况）可得c_1，c_2，于是最后便得

$$y_k=\frac{a+2b}{3}+(-1)^k\frac{a-b}{3\cdot 2^{k-1}}$$

5.19.1 我们在从$n+v$个匣子里选出的v个匣子上都做上记号（例如，一个乘法点“·”的记号）。在第一个作记号的匣子$N0.1$前的每一个匣子里都放一个因子x_1，在$N0.1$和$N0.2$间那些没标记号的匣子里，每一个都放上一个因子x_2，在$N0.2$和$N0.3$间的匣子里放因子x_3，…，在$N0.(v-1)$和$N0.v$间的匣子里放因子x_v，在$No.v$后的那些匣子里则放因子1。这样，对于任何一个从$n+v$个匣子里选出v个匣子的选择，就对应了一个形如$x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}\cdots x_v^{m_v}$的乘积，其中$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_v\leqslant n$，即多项式里的一项。这就得

到了问题的一个直观的论证。

参见习题3.40.1。

6.13.1 （斯坦福大学1949）这个问题是：求一个正整数x，使得x^2的所有各位数字都是1。

(1)只保持一部分（一小部分）条件：x^2的末位数字是1。而x^2的末位数字仅依赖于x的末位数字，所以只须考虑一位数就够了，它们的平方分别是

0，1，4，9，16，25，36，49，64，81

〔注意x^2和$(10-x)^2$有相同的末位数字。〕于是只有以1和9结尾的数字是合格的。

(2)保持一部分（稍多一点的部分）条件：x^2的最后两位数是11。考虑两位数就行了，x和$100-x$中只需要考虑一个，再由(1)，最后只须考虑十个数字01，11，21，…，91。它们中没有一个平方的结尾是11，这就证明了结论。

本题的启示：把“求证的问题”转化为“求解的问题”可能会带来好处。

6.17.1〔斯坦福大学1965〕对“年龄”我们只承认整的年头。下面是一张72分解成为三个正整数因子的表，每一行后面的数是这三个因子的和：

1·1·72	74	2·2·18	22
1·2·36	39	2·3·12	17
1·3·24	28	2·4·9	15
1·4·18	23	2·6·6	**14**
1·6·12	19	3·3·8	**14**
1·8·9	18	3·4·6	13

只有一个（三个因子的）和数出现不止一次，已用黑体字标

出来了。"那个最大的男孩"这一注释使我们能在这两种情形间作出选择：这些男孩是8岁，3岁和3岁。

7.2.1 见习题3.91，这些点表示下列量

C_6　　I_6

C_{12}

　　I_{12}

C_{24}

　　I_{24}

C_{48}

　　I_{48}

C_{96}

　　I_{96}

9.11.1 （参见美国数学月刊，第56卷，1949，
pp.423－424。）

预先选择

$$min(a_n, b_n) = \frac{1}{n^2}$$

（取任何别的正项递减的收敛级数也同样可以）。级数

$$(1)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{12^2}\right)+\left(\frac{1}{12^2}+\cdots\right.$$

$$(1)+(1)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{43^2}+\cdots\right.$$

是由括弧里对应的“段”组成的。在有一段里，每一项都等于预先选出的那个极小值；在另一个级数的对应的段中所有的项都相等，都等于前面一段的最后一项，而且它们的和是1。这两种类型的段在两个级数中交替出现。

这些级数还没有十分满足所述的条件；它们的项在“$\geqslant$”的意义下递减，而不是在“$>$”的意义下递减。不过可以作一个简单的修正：在各项都相等的段中，减去一段首项充分小，公差也充分小的算术级数，其和小于$\frac{1}{2}$。

14.2.1 （斯坦福大学1952）假设条件是什么？

$$a<\frac{b+c}{2}$$

结论是什么？

$$\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$$

它等价于

$$2\alpha<\pi-\alpha$$

即

$$\alpha<\frac{\pi}{3}$$

有关的知识是：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$>\frac{b^2+c^2-\frac{(b+c)^2}{4}}{2bc}$$

$$\frac{3(b^2+c^2)}{8bc}-\frac{1}{4}$$

$$\geqslant\frac{6bc}{8bc}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

这就证明了结论。

12.5.1 (Julius G.Baron；见数学杂志，第39卷，1966，p.134和p.112)

这个问题实质上就是：求一个既内接一圆又外切一圆的四边形的面积A，已给它的四条边a，b，c和d。

十二世纪以前在印度出现过一个与之密切有关的问题。如果你曾听说过这个问题，并认真地问自己：你知道一个有关的问题吗？你知道一个具有同一类型未知量的问题吗？那么你就很可能回忆起它来。

事实上，这个有关的问题与所提问题有同样的未知量和同样的已知量，在所提条件中最明显的分款有一半是完全一样的。这个问题是：求一个内接四边形的面积，已知它的边是a，b，c和d。它的解是（MPR，第I卷，pp.251—252，习题41）

$$A^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

其中$2p=a+b+c+d$

得到这个结果，则只须再注意到以下事实就足够了：如果四边形还是外切的，而且a是c的对边，b是d的对边，则

$$a+c=b+d=p$$

12.9.1令

$$b+c-a=2A,\quad c+a-b=2B,\quad a+b-c=2C$$

则

$$\frac{1}{x^2}=\frac{A}{xyz},\quad \frac{1}{y^2}=\frac{B}{xyz},\quad \frac{1}{z^2}=\frac{C}{xyz}$$

相乘，我们得到

$$xyz=ABC$$

于是

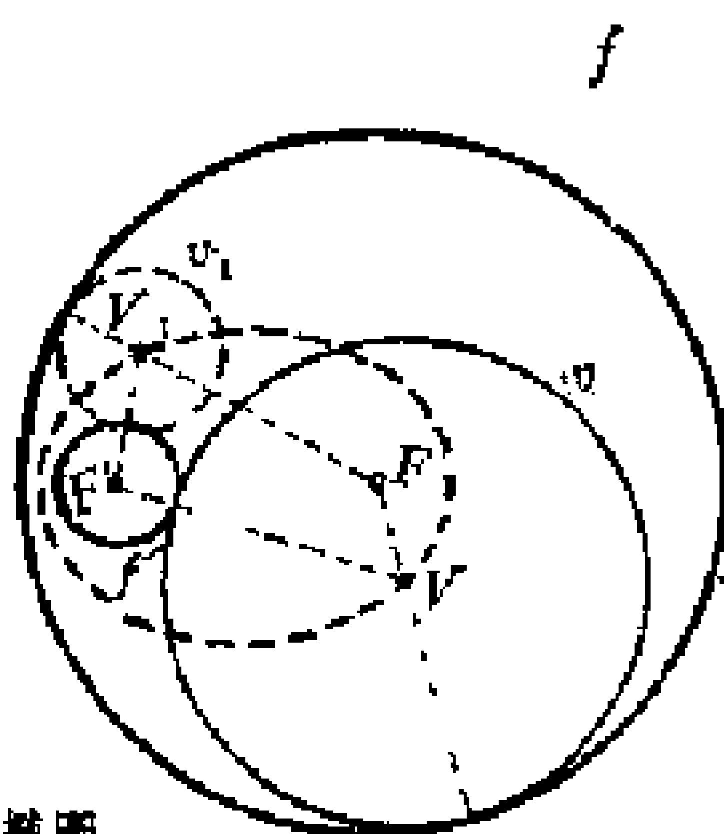
$$x^2=BC,\quad y^2=CA,\quad z^2=AB$$

为了整个讨论的完美，剩下还需要讨论一下未知量x，y和z中有一个或几个等于零的情形。

12.9.2 椭圆的常见的定义涉及焦点。考虑这样的定义就会引到问题“焦点在哪儿？”这样最后就引到去猜测一个较容易证明的更强的命题：在给定的有关f，f'和v的假定下，V的轨迹是一个以F和F'为焦点的椭圆。实际上，椭圆的定义在这里是满足的。从图形中容易看出

$$FV+F'V=r-r'$$

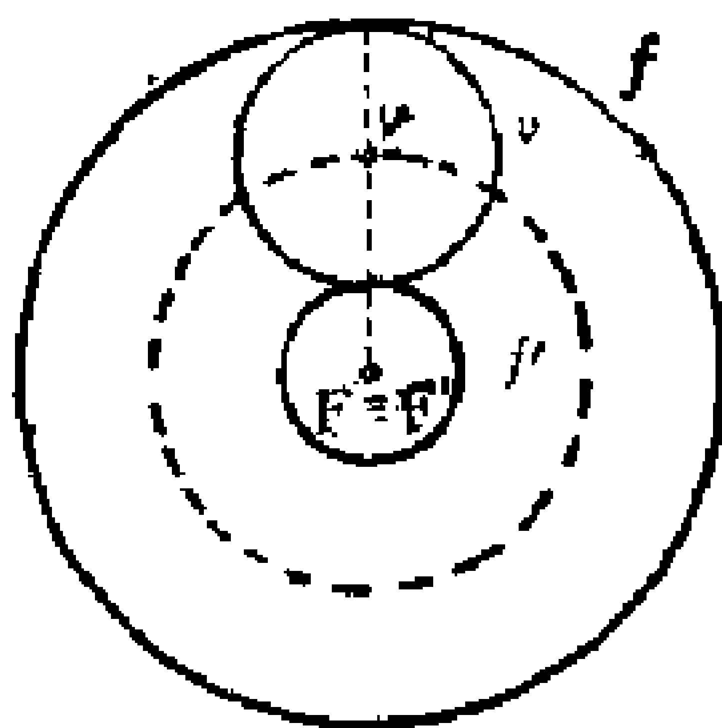
其中r和r'分别是f和f'的半径（见图AS12.9.2）*。



图AS12.9.2 椭圆

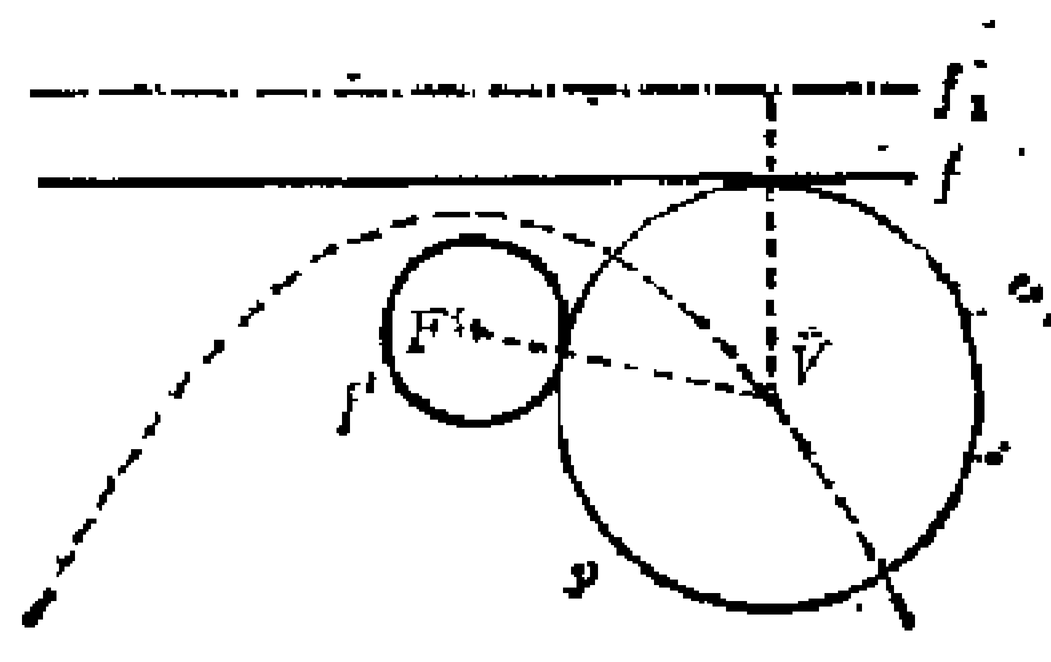
* 图AS12.9.2，AS12.9.3(a)—(d) 均为俄译本插图。见俄译本pp.425—427，图59a—d。

12.9.3(1) 半径为$\frac{r+r'}{2}$的同心圆（见图 AS 12.9.3 (*a*)）。



图AS12.9.3(a)　焦点重合的椭圆

(2) 以f为准线以F'为焦点的抛物线（见图AS12.9.3 (*b*)）。



图AS12.9.3(b)　椭圆的极限情形

(3) 焦点为F和F'的双曲线（见图AS12.6.3(*c*)）。

图AS12.9.3(c)　双曲线

(4) 以f　F和f'　F'为端点的线段的垂直平分线（见图AS12.9.3(d)）。

图AS12.9.3(d)　双曲线的特殊情形

某些其他情形：

(5) 习题12.9.2或(3)的极限情形：f'是f上的一个点，这时轨迹是一条直线。

(6) (3)的特殊情形：$r=r'$，这时轨迹也是一条直线。

还可以提更多的问题：

关于(3)：渐近线的方向是什么？它们的交点在哪里？方向和位置必可由定圆f和f'决定，是怎样决定的？为什么是这样决定的？

关于(5)：整条直线都是椭圆的极限情形吗？或都是双曲线的极限情形？还是直线的某些部分是这个的极限情形，另一些部分是那个的极限情形？等等。

14.1.1 如果连续400个格列高里年精确地与400个天文学年一致，则一个天文学年长应为

$$\frac{97\cdot366+303\cdot365}{400}=365+\frac{97}{400}$$

天，即365天5小时49分12秒，它仅比由天文观测所得到的年长多26秒。差别是很小的，但在3323年里会积成一天。

15.2.1（参见斯坦福大学1964）(1)d把c分成的线段与邻边成比例。因此

$$\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2=b^2+d^2-2bd\cos\frac{\gamma}{2}$$

消去γ，得

$$d^2=\frac{ab[(a+b)^2-c^2]}{(a+b)^2}$$

(2) 如果$a=b=c$，则$d^2=\frac{3a^2}{4}$。如果$a^2+b^2=c^2$，则

$$\frac{d}{a\sqrt{2}} = \frac{b}{a+b}$$

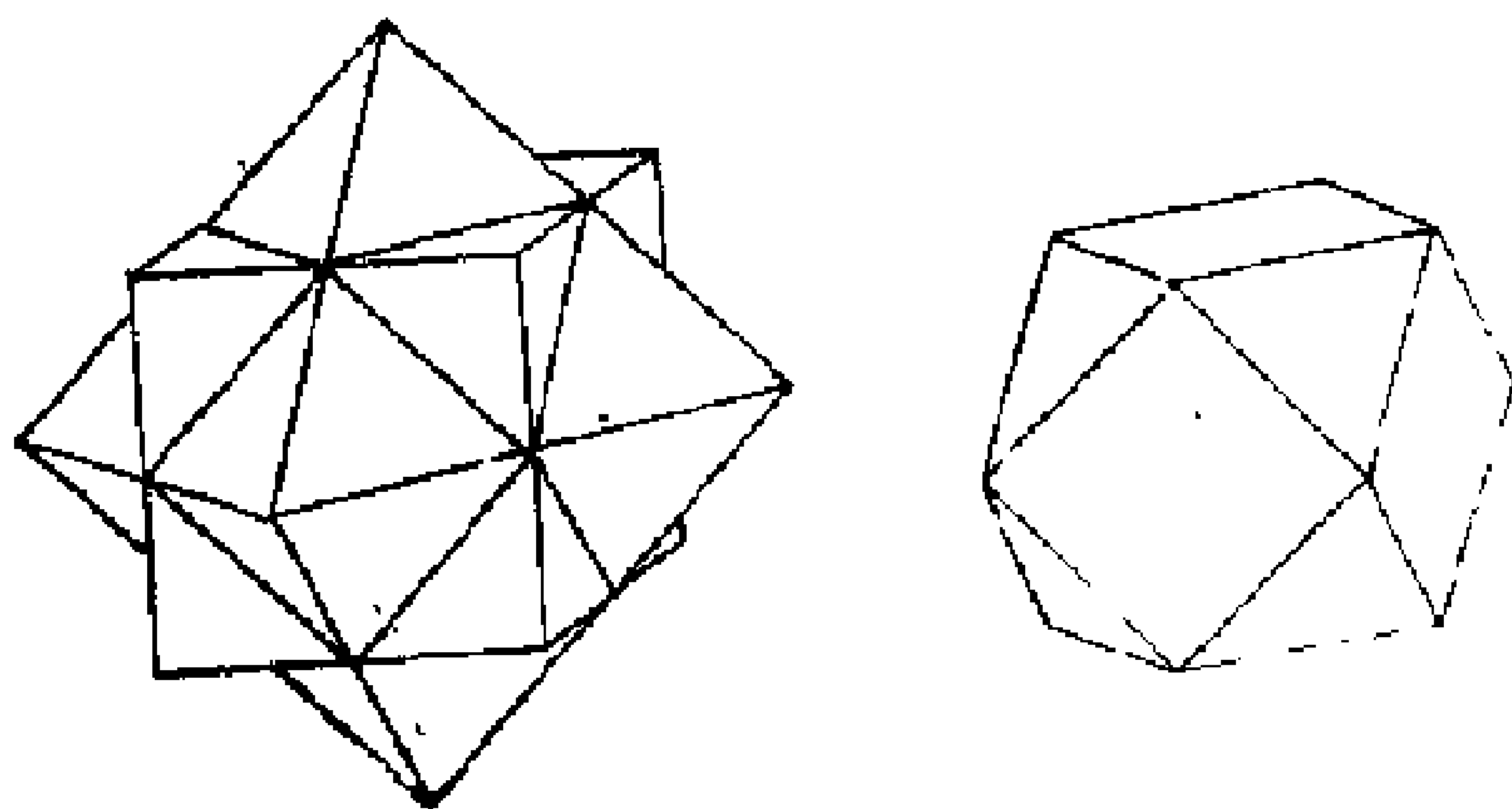
而这个比例关系可以从一对容易构造的相似三角形（作出它们！）里看出来。

如果$a = b$，则$d^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$。

如果$a + b = c$，则$d = 0$。

15.52.1 这个问题的叙述还留有不少余地，我们是故意这样做的："实在的"问题开始时也许是有点不确定的。下面我们来讲讲值得考虑的几点：

（1）每一个集合的点都充满一个多面体的内部和表面。见图AS15.52.1(a)，AS15.52.1(b)和AS15.2.1(c)。

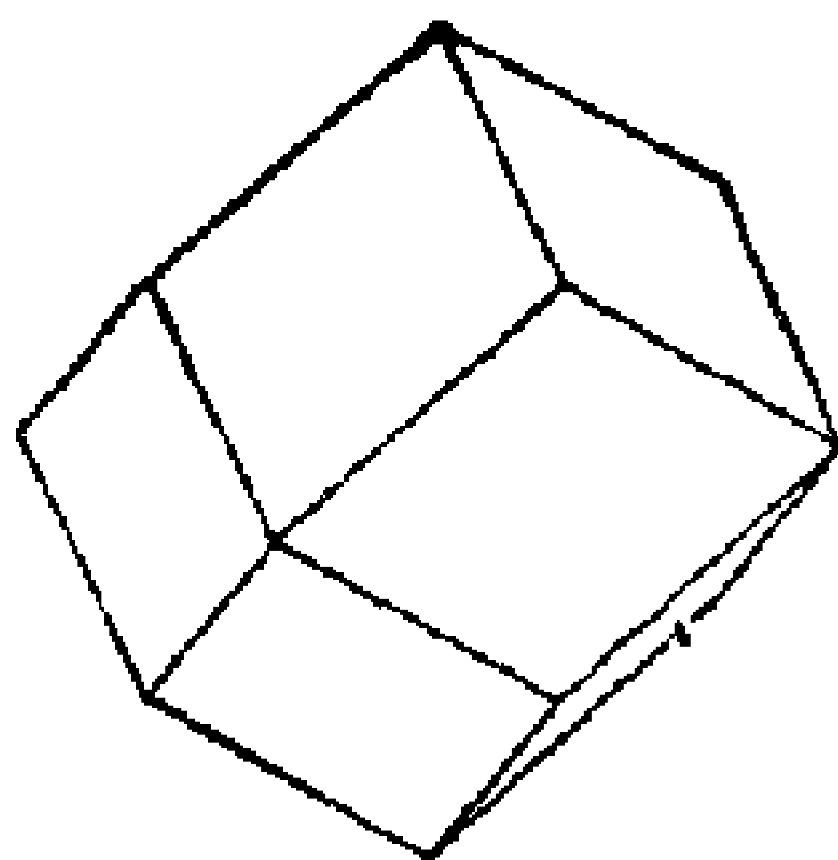


图AS15.52.1（a） 看出C和O并想像I和H　图AS15.52.1（b） C和O的交

C是一个正立方体，它的面都是正方形。

O是一个正八面体，它的面都是等边三角形（参见习题5.5）。

I是C和O的交，它叫做立方八面体。它有十四个面：



图AS15 52.1 (c)　凸包H

六个面是正方形，每一个都是从C的一个面里切出来的；八个面是等边三角形，每一个都是从O的一个面里切出来的。

H包含C和O，事实上，它是包含它们的最小凸集，即它们的凸包。它的面都是菱形，叫做菱形十二面体。

我们从C里削去八个合同的四面体便得到I。

我们在C上加上六个合同的棱锥便得到I。

(2) 我们列出这四个多面体的顶点

C	$(\pm1, \pm1, \pm1)$
O	$(\pm2, 0, 0)$ $(0, \pm2, 0)$ $(0, 0, \pm2)$
I	$(0, \pm1, \pm1)$ $(\pm1, 0, \pm1)$ $(\pm1, \pm1, 0)$
H	所有C和O的顶点

(3) 下表中，F，V和E分别表示每个多面体的面数，顶点数和棱数。

	F	V	E
C	6	8	12

O	8	6	12
I	6+8	12	24
H	12	8+6	24

(4) C，O和I内接于H，H的十四个顶点中有八个是C的顶点，剩下的六个是O的顶点，H的十二个面的中心乃是I的顶点。

C的每一条棱都与O的一条棱相对应：它们互相平分，它们是H的同一个面（菱形）的两条对角线，它们的交点是I的一个顶点。

(5) 所有这四个多面体都有同类的对称性。我们考虑最熟悉的图形C，以此来描述这种对称性。

在这个六面体中有两类不同的对称平面：

有三个各平行于六面体的一对相对的面并处在其中间。

有六个各包含一对相对的棱。

所有这九个对称平面都通过立方体的中心，并把它分成48个合同的四面体。

在这个立方体中，有三类不同的对称轴：（参见HSI，习题8，pp.235，239，244—245。）

其中六条是连接一对相对的棱的中心的直线，每一条都是两个对称平面的交线。

另外四条是连接一对相对的顶点的直线，每一条都是三个对称平面的交线。

还有三条是连接立方体一对相对的面的中心的直线，每一条都是四个对称平面的交线。

所有这十三条对称轴都通过立方体的中心。如果这条对

称轴是n个对称平面的交线，则此立方体绕这条轴转过$\frac{360^\circ}{n}$角以后就与自己重合。

(6) 习题2.50.1的两个模型分别涉及C和H。在第一个模型中，每一个球内切于一个立方体，所有这些立方体充满了整个空间，没有空隙，也不重叠。在第二个模型中，每一个球内切于一个菱形十二面体，所有这些菱形十二面体充满了整个空间，没有空隙，也不重叠。

(7) 为了计算I和H的体积V［注意，不要与(3)中的混淆！］，我们可以方便地从C开始。如果多面体外切于一个球，则V和S间有一联系：

C　　$S=24$,　　$V=\frac{1}{3}1\cdot S=8$

O　　$S=16\sqrt{3}$,　　$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}S=\frac{32}{3}$

I　　$S=12+4\sqrt{3}$,　　$V=\frac{20}{3}$

H　　$S=24\sqrt{2}$,　　$V=\frac{1}{3}\sqrt{2}S=16$

(8) 这个例子可以用来引进几个一般的概念，例如，线性不等式组，凸包，空间的对称性，等等。

某些更特殊的问题：还有没有别的象C和O这样的多面体对？还有没有别的充满空间的多面体？等等。

15.53.1 设a，b和D是正整数，D不是完全平方，它们之间存在关系式

$$a^2 - b^2D = 1$$

$a = 2$，$b = 1$，$D = 3$就是一个例子。设n是一个正整数，则存在正整数A和B，使得

$$(a - b\sqrt{D})^n = A - B\sqrt{D}$$

由此可得

$$(a + b\sqrt{D})^n = A + B\sqrt{D}$$

于是

$$\begin{aligned} A^2 - B^2D &= (a + b\sqrt{D})^n (a - b\sqrt{D})^n \\ &= (a^2 - b^2D)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} (a - b\sqrt{D})^n &= \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2D} \\ &= \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2 - 1} \end{aligned}$$

只需稍加修改便可以类似地推广习题15.53，或者把它与本题合并得到一个共同的推广。